Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова»

ОБУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОЗМОЖНОСТЕЙ GEOGEBRA

Учебно-методическое пособие

Архангельск

Издательство «КИРА»

2011

УДК 514(072)
ББК 74.262.21ся7
О-26

Авторы: О.Л. Безумова (отв. редактор), Р.П. Овчинникова, О.Н.Троицкая, А.Г. Троицкий, Л.В. Форкунова, М.В. Шабанова, Т.С. Ширикова, О.М. Томилова

Рецензенты: доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой общих математических и естественнонаучных дисциплин ГОУ ВПО Московской области «Академия социального управления» «Академия социального управления» **Т.Ф.Сергеева;** кандидат педагогических наук, доцент, директор Института математики и компьютерных наук Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова **Л.Э. Хаймина**

Печатается по решению редакционно-издательской комиссии Института математики и компьютерных наук Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова

О-26 Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra: учебно-методическое пособие / Федер. гос. автоном. образоват. учреждение высш. проф. Образования «Север. (Аркт.) федер. ун-т им. М. В. Ломоносова» ; [О.Л. Безумова, Р.П. Овчинникова, О.Н. Троицкая и др. ; отв. ред. О.Л. Безумова]. – Архангельск : КИРА, 2011. – 140 с.: рис., табл.
ISBN 978-5-98450-184-2
Агентство CIP Архангельской ОНБ

Данное учебно-методическое пособие адресовано слушателям курсов повышения квалификации учителей математики, студентам и аспирантам, овладевающим основами технологии обучения геометрии с использованием интерактивной геометрической среды GeoGebra. Пособие включает материалы для освоения самого программного продукта в контексте рассмотрения его дидактических возможностей; теоретических и нормативных основ организации обучения в школе с компьютерной поддержкой; частных методик обучения геометрии с использованием интерактивной геометрической среды. Пособие разработано в рамках реализации Российско-Болгарского проекта «Методики и информационные технологии в образовании» (MITE).В приложении приведены примеры конспектов уроков геометрии, разработанных и проведенных учителями пилотных площадок проекта Архангельской области.

УДК 514(072)
ББК 74.262.21ся7

ISBN 978-5-98450-184-2

Содержание

Предисловие

В современной школе компьютерная техника и всемирная сеть Интернет все шире используется не только на уроках информатики, но и при изучении других предметов. Необходимость компьютерной поддержки учебного процесса определяется сегодня стремительным развитием информационных и коммуникационных технологий, проникновением их во все сферы общественной жизни, в том числе и сферу образования, и регламентируется требованиями федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования второго поколения, утвержденного 17 декабря 2010 года приказом Министерства образования и науки РФ. Там, в частности, отмечается: «Образовательное учреждение должно иметь интерактивный электронный контент по всем учебным предметам, в том числе, содержание предметных областей, представленное учебными объектами, которыми можно манипулировать, и процессами, в которые можно вмешиваться» (С. 50).

Удовлетворение этому приводит к необходимости внесения изменений в традиционную методику изучения большинства школьных предметов. Одним из таких предметов является школьный курс геометрии.

Традиционная методика обучения геометрии ориентирована на решение образовательных задач, связанных с развитием логических компонентов мышления учащихся в ущерб образным компонентам мышления и творчеству. Организация компьютерной поддержки обучения геометрии призвана преодолеть эти недостатки. Основным средством организации такой поддержки являются «интерактивные геометрические среды (ИГС), которые представляют собой программное обеспечение, позволяющее выполнять геометрические построения на компьютере таким образом, что при изменении одного из геометрических объектов чертежа остальные также изменяются, сохраняя заданные отношения неизменными» [23, с.85].

Удобство использования ИГС в процессе обучения геометрии определяется тем, что система ее операций совпадает с системой операций, характерной для самой геометрии (построить прямую, проходящую через точку; провести окружность заданного радиуса с центром в данной точке и т. д.). Кроме того, ИГС допускает упрощение геометрических построений за счет создания инструментов для выполнения более сложных операций (деление отрезка пополам, вписывание треугольника в окружность и т.д.). Однако главным достоинством ИГС является возможность создания динамических чертежей и текстов, которые делают видимым динамическую устойчивость и изменчивость свойств геометрических фигур (как позиционных, так и метрических).

В настоящее время известно не менее десятка ИГС, разработанных в разных странах. Все они отличаются только деталями. В России наиболее известными являются «Живая математика», «Математический конструктор», «GEONExT», «GeoGebra». Две последние являются свободно распространяемыми программными продуктами. Таким образом, в настоящее время актуальной является проблема поиска эффективных путей использования ИГС в образовательном процессе и разработки соответствующих технологий обучения геометрии. Попытка создания одной из таких технологий была предпринята Н.Х. Розовым, А.Г. Яголой, Т.Ф. Сергеевой, И.Н. Сербисом и в настоящее время реализована в качестве учебного комплекта «Наглядная планиметрия» для 7, 8 и 9 классов [17–19]. Учебно-методический комплект включает в себя:

• *электронный ресурс* (*диск*) с системой анимаций, динамических моделей, упражнений и задач для самостоятельного изучения школьниками теоретических вопросов, решения задач преимущественно исследовательского характера на базе ИГС «GEONExT» и «GeoGebra»,

• *рабочую тетрадь*, в которой фиксируются результаты выполнения учащимися упражнений и задач с использованием построений в интерактивной геометрической среде.

Предлагаемые авторами *анимации* и *динамические модели* предназначены для введения геометрических понятий, построений геометрических объектов в среде, доказательств некоторых теорем и формул; *упражнения* — для организации деятельности учащихся по освоению инструментов ИГС (GEONExT и GeoGebra), необходимых для построения и оперирования динамическим чертежом изучаемых геометрических объектов; *задачи* – для включения учащихся в учебно-исследовательскую деятельность разного уровня сложности, связанную с построением динамических чертежей и проведением компьютерных экспериментов для выявления свойств и признаков изучаемых геометрических понятий.

Задачами данного учебно-методического пособия являются:

• раскрытие технических основ создания и совершенствования предложенного Н.Х. Розовым, А.Г. Яголой, Т.Ф. Сергеевой, И.Н. Сербисом методического продукта (глава 1);

• описание особенностей организации процесса обучения геометрии с компьютерной поддержкой (глава 2);

• представление читателям частных методик достижения основных образовательных результатов средствами ИГС (глава 3).

Авторы надеются, что большой интерес читателей вызовут и приложения к данному учебно-методическому пособию, содержащие: аннотированный список ресурсов Интернет по теме «Обучение геометрии с использованием среды GeoGebra», примеры конспектов уроков геометрии с компьютерной поддержкой.

Глава 1. Возможности интерактивной геометрической среды GeoGebra

При запуске программы GeoGebra появляется основное окно, вид которого представлен на *рисунке 1*.

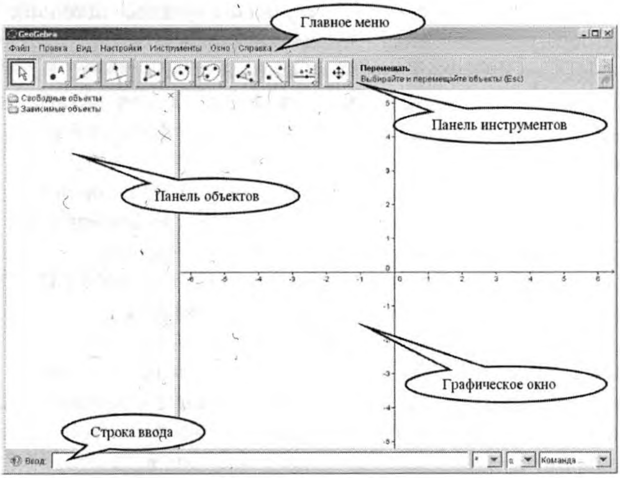


Рис. 1

В основном окне можно выделить следующие области:

- *Главное меню* – меню доступа к возможностям, предоставляемым программой GeoGebra.
- *Панель инструментов* – набор кнопок быстрого доступа к инструментам создания геометрических конструкций в графическом окне с использованием мыши.
- *Графическое окно* – область для отображения геометрических конструкций.
- *Панель объектов* – область для отображения информации о геометрических объектах, входящих в состав изображенной в графическом окне геометрической конструкции (их видах, символьных обозначениях, координатах или уравнениях). Геометрические объекты разделяются на *свободные*, т.е. заданные вне зависимости от других ранее построенных объектов, и *зависимые,* т.е. объекты, создаваемые с использованием информации о других ранее построенных объектах.
- *Строка ввода* – поле для ввода или копирования алгебраических уравнений, задающих геометрическое место точек. После ввода алгебраического уравнения и нажатия клавиши Enter информация о геометрическом объекте отображается в *панели объектов*, а сам геометрический объект изображается в *графическом окне*.

1.1. Построение динамических чертежей

Основной особенностью программы GeoGebra является наличие возможности построения **динамических чертежей** – геометрических конструкций, которые можно изменять при сохранении алгоритма их построения путем задания изменений одного или нескольких геометрических величин конструкций (параметров).

Инструментом, позволяющим изменять значение параметра, в GeoGebra является *Ползунок* (*рис. 2*).

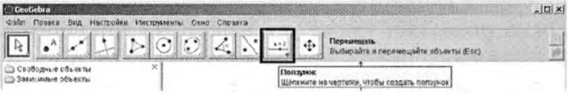


Рис. 2

Кнопка *Ползунок* в правом нижнем углу имеет направленную вниз стрелку, при нажатии на которую появляется вкладка со списком дополнительных инструментов (*рис. 3*). Построение динамического чертежа следует начинать с нажатия кнопки *Ползунок* на панели инструментов или в открывшейся вкладке.

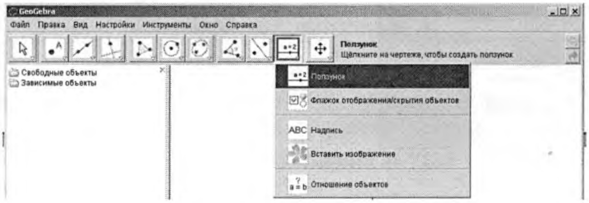


Рис. 3

После выбора инструмента *Ползунок* необходимо щелкнуть левой кнопкой мыши в любом месте *графического окна*. В результате появится окно диалога Ползунок (*рис. 4а-4б*) в котором необходимо задать характеристики ползунка: тип параметра (*Число* (*рис. 4а*) или *Угол* (*рис. 4б*)), имя параметра, минимальное и максимальное значение параметра (область допустимых значений), величину шага изменения параметра.

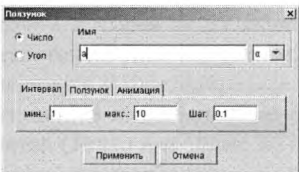


Рис. 4а

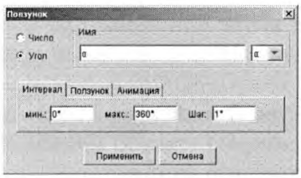


Рис. 4б

Заметим, что под «числом» разработчики программы GeoGebra понимают параметрическое задание длины какого-либо отрезка, а под «углом» - параметрическое задание угловой меры. Минимальное и максимальное значение параметра определяется областью допустимых значений параметра, определяемого смыслом понятия «длина отрезка», «величина угла» и естественными ограничениями, вытекающими из условия задачи (теоремы).

В случае если параметр будет определять значение угла (*рис. 4б*), то его область допустимых значений и шаг изменения могут быть заданы как в градусах, так и в радианах. По умолчанию в качестве единицы измерения этих параметров предлагается градус (в полях ввода после значений указан символ °). Если в процессе ввода значений этот символ удалить, то соответствующая величина будет выражена в радианах.

Диалоговое окно позволяет также устанавливать дополнительные характеристики ползунка. Для этого предназначены закладки *Ползунок* и *Анимация* окна диалога (*рис. 5*). На закладке *Ползунок* (*рис. 5а*) можно задать вариант расположения ползунка (*горизонтальный* или *вертикальный*), запретить и разрешить его перемещение в графическом окне с помощью мыши («флажок» *закрепленный*), а также выбрать размер ползунка (поле ввода *Ширина*). Возможности, предоставляемые закладкой *Анимация* (*рис. 5б*), будут рассмотрены в пункте «Создание анимации».

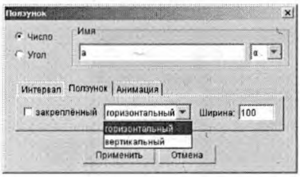


Рис. 5а

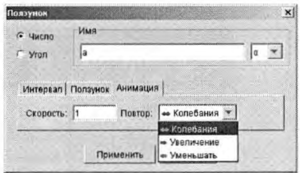


Рис. 5б

После определения всех характеристик ползунка и нажатия кнопки *Применить* в *графическом окне* появится изображение ползунка, а в *панели объектов* – свободный объект (символ и начальное значение параметра) (*рис.6*).

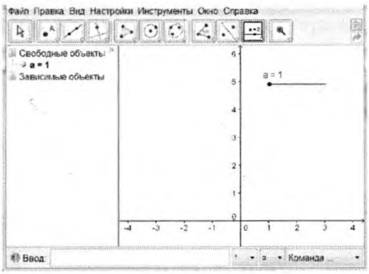
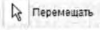


Рис. 6

Для изменения начального значения параметра необходимо воспользоваться инструментом 

. Выбрав этот инструмент, в *графическом окне* нужно захватить точку, расположенную на ползунке, и менять значение соответствующего параметра (*рис. 7*).

Рис. 7

Параметры, задаваемые с помощью ползунка, могут быть использованы при описании создаваемых геометрических конструкций с помощью уравнений. Для этого в строку *ввода* достаточно записать уравнение, содержащее этот параметр и нажать Enter (*рис.8*). Кроме того, параметры можно применять для построения геометрических конструкций с помощью инструментов.

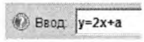


Рис. 8

Числовые параметры используются следующими инструментами (*рис. 9*):

- отрезок заданной длины (строится путем указания одного из концов отрезка и задания его длины; числовой параметр – *длина*);
- окружность по центру и радиусу (строится путем указания центра окружности и задания радиуса; числовой параметр – *радиус*);
- гомотетия относительно точки (строится путем указания проецируемого объекта, центра и коэффициента гомотетии; числовой параметр – *коэффициент гомотетии*).

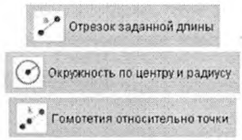


Рис. 9

Параметры, определяющие величину угла, можно применять при использовании следующих инструментов (*рис. 10*):

- угол заданной величины (строится путем указания точки одной из сторон угла, вершины угла и величины угла; угловой параметр – величина угла);
- поворот вокруг точки на угол (строится путем указания исходного объекта, центра вращения и угла поворота; угловой параметр – угол поворота).

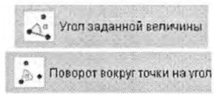


Рис. 10

Продемонстрируем использование ползунков для построения динамического чертежа на примере окружности с центром, абсцисса и ордината которого могут изменяться в переделах от -5 до 5, и с переменным радиусом, диапазон изменения которого находится в пределах от 1 до 7.

Для реализации данного построения в программе GeoGebra сначала создадим ползунок, который будет отвечать за изменение радиуса (*R*) окружности от 1 до 7 с шагом 0,1. После этого выберем в панели инструмент *Окружность по центру и радиусу*, укажем с помощью мыши в произвольном месте *графического окна* точку, которая будет являться центром окружности, а затем в появившемся диалоговом окне *Окружность по центру и радиусу* в поле ввода *Радиус* укажем параметр *R* (*рис. 11*).

В результате в панели объектов отобразится информация о двух свободных объектах (*Точка A* и *Число R*) и одном зависимом объекте (*Окружность c*). Теперь необходимо добавить еще два ползунка, которые буду отвечать за изменение абсциссы (параметр *a*) и ординаты (параметр *b*) центра окружности. После этого следует в панели объектов нажать правой кнопкой мыши на объект *Точка A* и в появившемся контекстном меню выбрать *Свойства*, что приведет к появлению одноименного окна диалога. В поле ввода *Значение* этого окна необходимо ввести наименования параметров *(a, b)*, отвечающие за абсциссу и ординату точки, вместо указанных конкретных координат *точки A* (*рис. 12*).

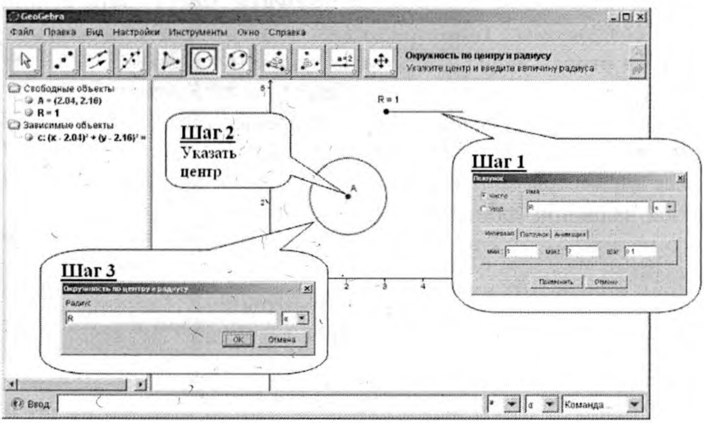


Рис. 11

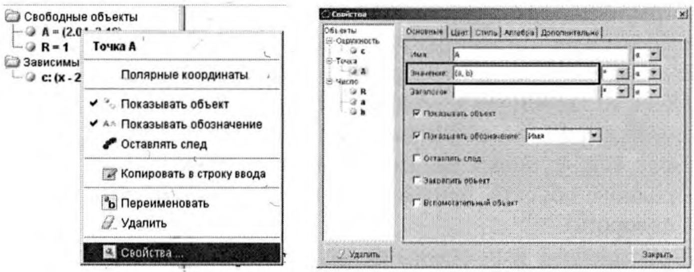


Рис. 12

После нажатия в окне диалога кнопки *Закрыть*, точка перейдет из разряда свободных объектов в разряд зависимых. Координаты точки *A* будут определяться параметрами *a* и *b*, значения которых можно изменять с помощью соответствующих ползунков. Аналогичным образом путем перемещения точки на ползунке меняется и радиус *R* окружности (*рис. 13*).

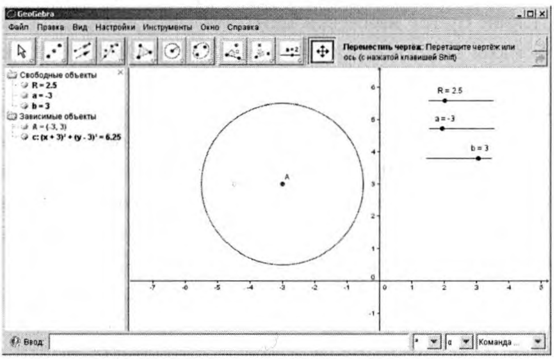


Рис. 13

Поставленная задача может быть реализована путем непосредственного ввода в строку ввода уравнения окружности: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Результат, отображенный в графическом окне, будет идентичным.

Применение угловых параметров рассмотрим на примере построения равнобедренного треугольника с основанием, равным a, и углом при основании, равным α. При этом пусть основание меняется в пределах от 1 до 7, а угол при основании – от 0º до 90º (так как угол при основании равнобедренного треугольника может быть только острым). Для построения необходимо, прежде всего, разместить в графическом окне два ползунка, соответствующих числовому параметру a и угловому параметру α (*рис. 14*).

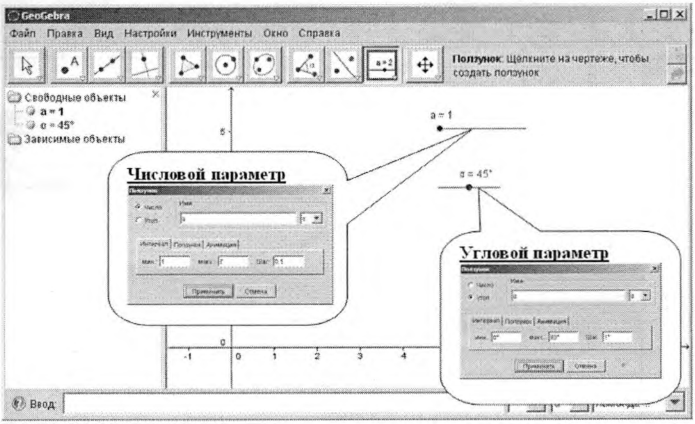
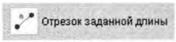


Рис.14

Затем с помощью инструмента 

отметим в графическом окне точку начала отрезка (точка A), а в появившемся затем диалоговом окне отрезка, равной параметру a (*рис. 15*).

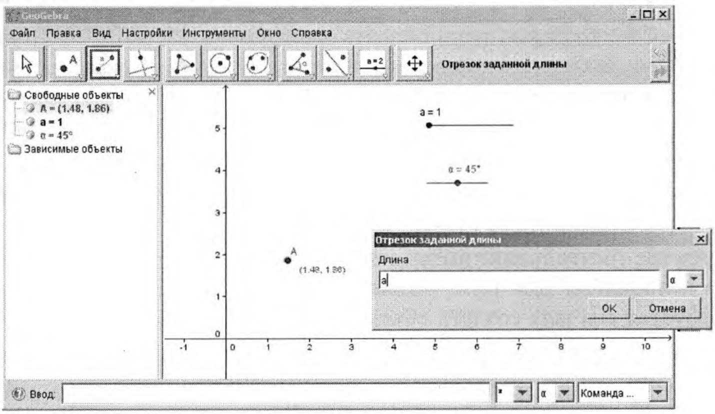


Рис. 15

В результате будет построен отрезок *AB* длиной *a*. После этого с использованием инструмента «Угол заданной величины» нужно построить два угла величиной α при основании *AB* с вершинами в точках *A* и *B*. При построении углов необходимо сначала отметить в *графическом окне* точку стороны угла (например, точку *B*), затем вершину угла (например, точку *A*) и на заключительном этапе в открывшемся диалоге *Угол заданной величины* в поле ввода *Угол* указать параметр α, используя выпадающий список символов греческого алфавита, расположенный справа от поля ввода (*рис. 16*). В результате будет построен угол BAB'.

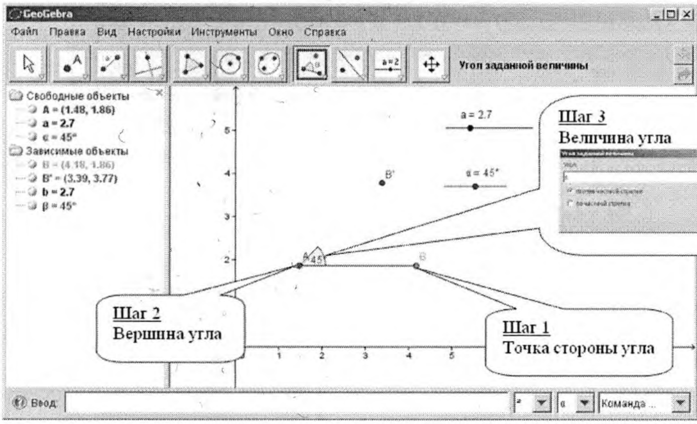


Рис. 16

Аналогичным образом может быть построен и второй угол ABA'. Единственным отличием является смена его ориентировки: в диалоговом окне вместо пункта «против часовой стрелки» надо указать пункт «по часовой стрелке».

Теперь требуется отметить вершину *C* равнобедренного треугольника, которая будет определяться как точка пересечения лучей AB' и BA'. Для построения лучей необходимо использовать инструмент «Луч по двум точкам», указывая последовательно начальную точку луча и точку на луче. Для построения луча AB' надо последовательно указать на точки *A* и B', а для построения луча BA' – указать на точки *B* и A'. Точка пересечения лучей отмечается с помощью инструмента «Пересечение двух объектов» путем последовательного указания двух пересекающихся лучей AB' и BA'. В результате будет определена вершина равнобедренного треугольника – точка *C* (*рис. 17*).

Построение треугольника вызывает интерес с точки зрения вычисления его периметра и площади. Для того, чтобы определить эти результирующие параметры, требуется сначала создать объект типа многоугольник. Для этого необходимо, используя инструмент «Многоугольник», последовательно указать все три вершины треугольника – точки *A*, *B* и *C*, а затем снова выделить точку *A*. После создания объекта *Многоугольник* можно с помощью инструментов «Расстояние или длина» и «Площадь» определить его периметр и площадь соответственно.

Для этого, выбрав соответствующий инструмент, следует указать на созданный многоугольник (треугольник) *ABC*. Изменение с помощью ползунков значений параметров *a* и α будет приводить к изменению не только графического представления треугольника, но и к изменению зависящих от параметров величин – периметра и площади (*рис. 18*).

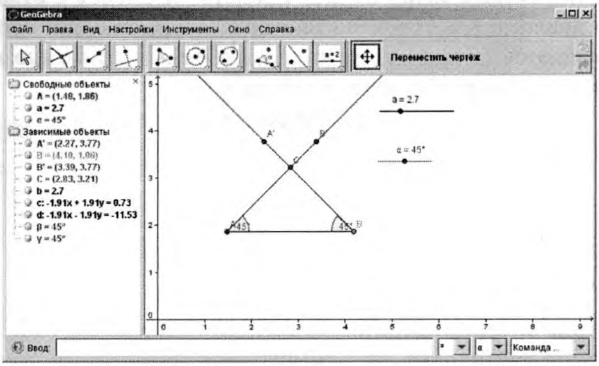
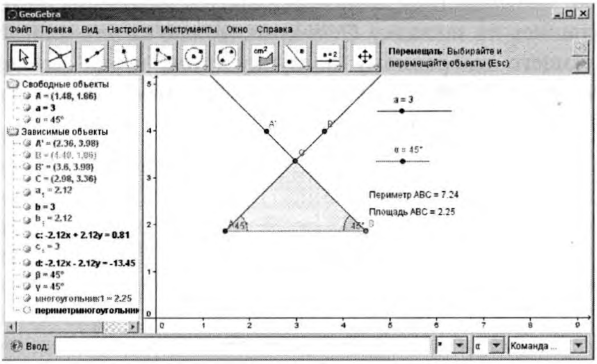


Рис. 17



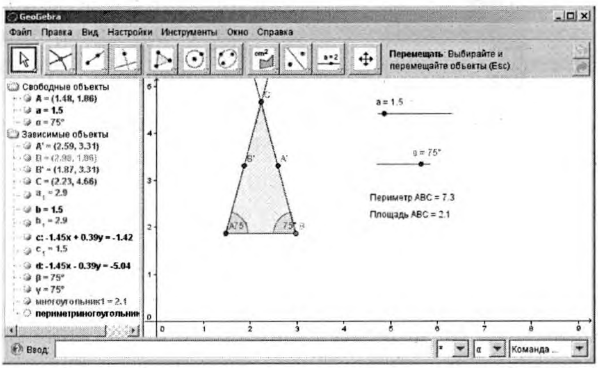


Рис. 18

Рассмотрим дополнительные возможности настройки и использования ползунков. В *графическом окне* подведем указатель мыши к ползунку, отвечающему за изменение параметра *a*, и нажатием левой кнопки мыши вызовем контекстное меню этого объекта (*рис. 19*).

Выбор в контекстном меню пункта Свойства приведет к открытию одноименного окна диалога, в котором на закладке *Ползунок* будет отображена основная информация об объекте этого типа (*рис. 20*). Здесь можно внести необходимые коррективы в ранее заданный параметр.

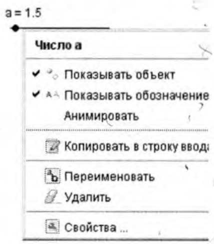


Рис. 19

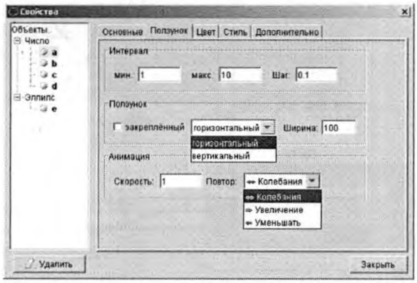
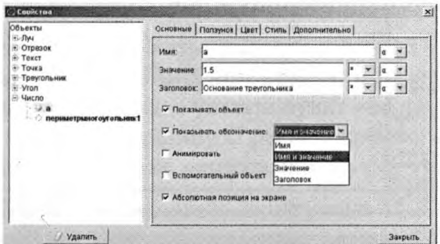


Рис. 20

Переключившись на закладку *Основные*, можно задать описание параметра, соответствующего выбранному ползунку (поле ввода *Заголовок*). Также можно выбрать, какое обозначение будет выводиться около ползунка: *Имя, Имя и значение, Значение, Заголовок* (*рис. 21*).



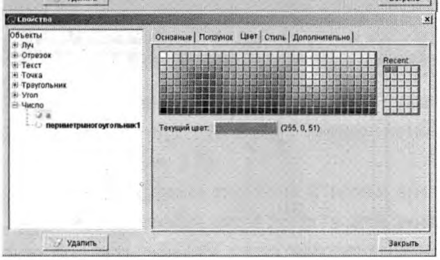
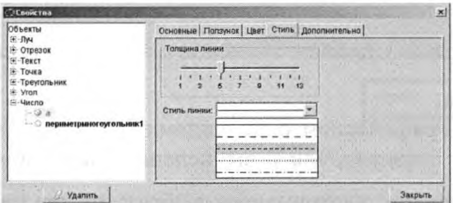


Рис. 21 *Рис. 22*

Закладка *Цвет* (*рис. 22*) позволяет указать цветовую гамму для отображения ползунка. Закладка *Стиль* (*рис. 23*) предназначена для выбора толщины и типа линии, с помощью которой будет отображен ползунок в *графическом окне*.



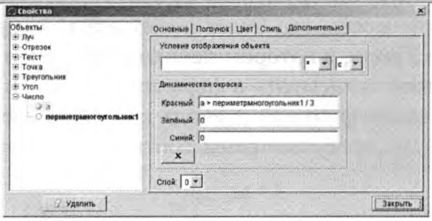


Рис. 23 *Рис. 24*

Закладка *Дополнительно* задает условия динамической окраски графического представления ползунка в зависимости от выполнения определенных условий. На *рисунке 24* показано условие (а > периметрмногоугольник1 / 3), при котором ползунок параметра *a* станет красным, если значение параметра *a* будет превышать треть периметра треугольника.

1.2. Создание динамических текстов

Использование динамических чертежей в образовательном процессе требует дополнения графической информации текстовой. Например, информацией о значениях геометрических величин (длин отрезков, величин углов и периметров и площадей многоугольников). Возможности отображения их в графическом окне программы GeoGebra были показаны в предыдущем разделе. Так, на *рисунке 18* показаны значения периметра и площади треугольника, которые изменяются при изменении значений параметров *a* и α.

Возможность изменения текстовой информации в соответствии с изменением геометрической конструкции на чертеже будем называть **динамическим текстом.** Рассмотрим дополнительные возможности программы GeoGebra в моделировании динамических текстов, оформлении их в соответствии с требованиями пользователя.

Пусть на чертеже необходимо вывести информацию о величине высоты построенного равнобедренного треугольника. Данная задача может быть реализована средствами программы GeoGebra путем непосредственного построения высоты и вывода на экран значения ее длины. Но, если имеется необходимость демонстрации аналитической зависимости длины высоты от заданных параметров, то необходимо вывести в графическом окне не только значение длины высоты треугольника, но также и вычислительную формулу с динамическим текстом, отображающим ее применение к конкретным значениям параметров. Так, например, высота равнобедренного треугольника может быть вычислена по формуле: $h = \frac{a}{2} tg\alpha$, где a – длина основания, α – угол при основании равнобедренного треугольника.

Для создания в графическом окне динамического текста, который будет отображать как саму формулу, так и вычисленное значение высоты треугольника, необходимо в панели инструментов выбрать инструмент ABC Надпись и указать в графическом окне место, где будет располагаться надпись. В результате появится окно диалога *Текст*, в котором необходимо ввести содержание надписи. Формулы необходимо записывать в формате LaTeX[1] [10]. Для записи стандартных операций, задания функций и ввода символов греческого алфавита в диалоговом окне «Текст» предусмотрены соответствующие выпадающие списки (*рис. 25*).

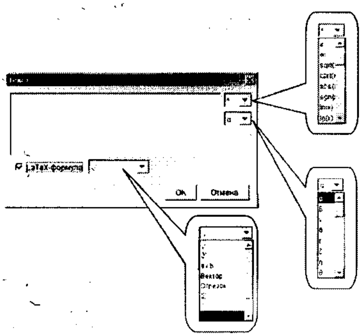


Рис. 25

Для вывода в графическом окне статической (постоянной, неизменной) части текста ее надо вводить в кавычках. Для вывода в графическом окне динамической части текста его требуется присоединить к статической части с помощью символа “+” (оператора конкатенации). Так, например, для вывода в графическом окне формулы для вычисления высоты равнобедренного треугольника по значениям длины его основания и угла при основании необходимо установить в окне диалога «*флажок*» (☑) LaTeX-формула и ввести следующую строку: "h = \frac{ a }{ 2 } tg α = " + (a / 2 tan(α)).

Если использование LaTeX-формул не является обязательным, то в окне диалога необходимо убрать соответствующий «*флажок*», а вместо формулы ввести обычное текстовое пояснение. В этом случае строка для вывода будет иметь, например, следующий вид: "Высота треугольника равна " + (a / 2 tan(α)).

Когда все необходимые записи введены, после нажатия кнопки ОК получим в графическом окне запись, представленную на *рисунке 26*.

[1] TEX - система компьютерной вёрстки, разработанная американским профессором информатики Дональдом Кнутом в целях создания компьютерной типографии. Сайт разработчиков программы LaTex: www.latex-project.org

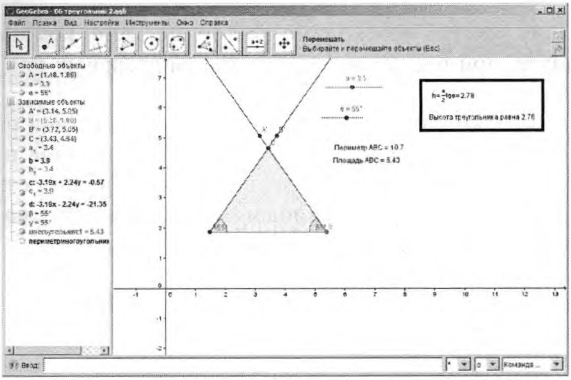


Рис. 26

Выделив в графическом окне надпись и нажав правой кнопкой мыши, с помощью контекстного меню можно вызвать диалог *Свойства* и на закладках *Текст* и *Цвет* задать характеристики шрифта и цвет надписи (*рис. 27*).

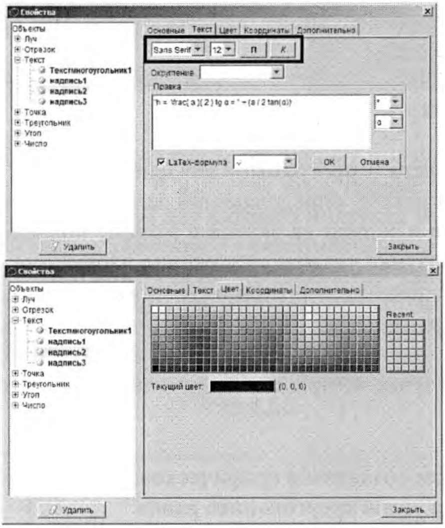


Рис. 27

Механизм создания динамических текстов программы GeoGebra может быть использован для разработки интерактивных текстов, т.е. текстов, созданных для общения с пользователем. Такие тексты позволяют осуществлять

- вывод в графическом окне текста по выбору пользователя;
- выбор пользователем одного из текстов, представленных в графическом окне;
- оценку правильности выбора.

Создание таких текстов необходимо при организации компьютерного тестирования учащихся, при постановке серии индивидуальных или дифференцированных заданий.

Рассмотрим возможности программы GeoGebra в создании интерактивных текстов на примере тестирования. Разработка тестов основана на использовании объектов типа *Ползунок* и определении условий видимости надписей и объектов. Для примера рассмотрим технологию создания теста по геометрии из трех вопросов, каждый из которых имеет три варианта ответов:

Вопрос 1. Сумма углов треугольника равна:

1) 90°;
2) 180°;
3) 200°.

Вопрос 2. Медиана, проведенная из вершины угла треугольника, делит пополам:

1) угол треугольника;
2) высоту треугольника;
3) противолежащую сторону треугольника.

Вопрос 3. Луч, проведенный из вершины угла треугольника и делящий угол пополам, называется:

1) высотой;
2) биссектрисой;
3) медианой.

Для разработки теста в программе GeoGebra создадим ползунок, который будет отвечать за параметр a, определяющий записи на экране в момент начала опроса, номер вопроса и записи на экране в момент подведения итогов опроса. В характеристиках ползунка укажем следующие параметры:

- минимальное значение – 0 (при этом значении пользователь информируется о начале тестирования, а вопросы не отображены в графическом окне);
- максимальное значение – количество вопросов, увеличенное на один (в рассматриваемом случае 4; при значении 4 на экран будут выведены итоги тестирования);
- шаг – 1.

Следующим шагом создадим в графическом окне 4 статических надписи:

“Вопрос 1. Сумма углов треугольника равна”

“Вопрос 2. Медиана треугольника делит пополам”

“Вопрос 3. Отрезок, проведенный из вершины треугольника и делящий угол треугольника пополам, называется”

Надписи с вопросами теста можно расположить вертикально друг под другом. После выбора позиции этих надписей на экране нажатием правой кнопки мыши нужно вызвать контекстное меню и выбрать *Свойства*. В возникшем диалоговом окне на закладке *Основные* необходимо установить «*флажки*» *Закрепить объект* (это защитит вопрос от изменений) и *Абсолютная позиция на экране* (это позволит запретить

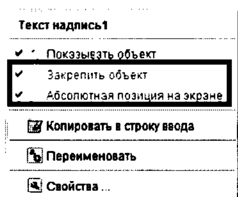


Рис. 28

передвижение надписи при передвижении графического окна вместе с его содержимым). Эти действия можно выполнить и прямо в контекстном меню установкой соответствующих *«флажков»* (*рис. 28*).

Если мы хотим, чтобы надписи с вопросами теста появлялись в графическом окне постепенно в соответствии с номером выбранного вопроса, то в диалоге *Свойства* на закладке *Дополнительно* необходимо ввести условие отображения надписи – значения ползунка *a*, при которых надпись должна быть видна. На *рисунке 29* показано условие отображения надписи с первым вопросом теста ($a \stackrel{?}{=} 1$).

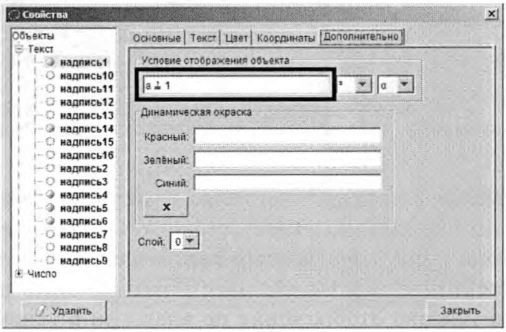


Рис. 29

Слева от каждой надписи создадим по одному ползунку, отвечающему за выбор ответа на каждый вопрос. В качестве имен параметров ползунков будем использовать *a1*, *a2* и *a3*. Зададим для каждого ползунка минимальное значение 0 (нет ответа), максимальное значение 3 (максимальный номер ответа) и шаг 1. Для каждого из этих ползунков укажем вертикальный тип расположения. Промежуточный результат выполнения указанных действий показан на *рисунке 30*.

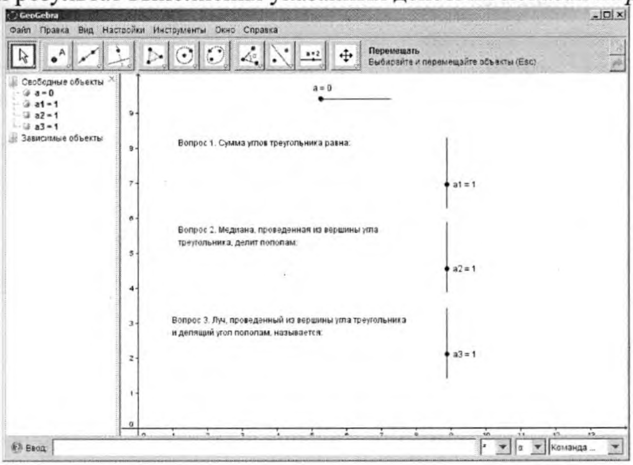


Рис. 30

Нажав правой кнопкой мыши на каждом из ползунков, отвечающих за выбор ответа, в появившемся контекстном меню необходимо убрать «*флажок*» *Показывать обозначение* (*рис. 31*).

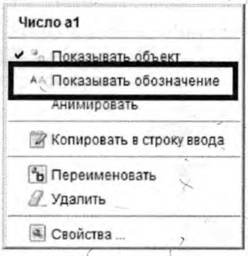


Рис. 31

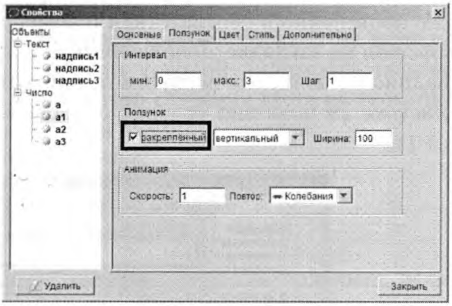


Рис. 32

Кроме того, выбрав в контекстном меню пункт *Свойства*, необходимо в диалоге *Свойства* на закладке *Ползунок* установить «*флажок*» *Закрепленный*, чтобы исключить возможность случайного перемещения ползунка во время ответов на вопросы теста (*рис. 32*). На закладке *Дополнительно* для каждого ползунка можно задать условие отображения по аналогии с условиями отображения надписей с вопросами (*рис. 29*).

Напротив каждого значения ползунков-ответов необходимо расположить надписи, содержащие варианты ответов на вопросы теста. Напротив "нулевых" значений ползунков можно расположить надписи с текстом "Нет ответа". Для надписей с ответами и надписей с текстом "Нет ответа" также необходимо установить в контекстном меню «флажки» *Закрепить объект* и *Абсолютная позиция на экране*. В результате в графическом окне будет получен результат, представленный на *рисунке 33*.

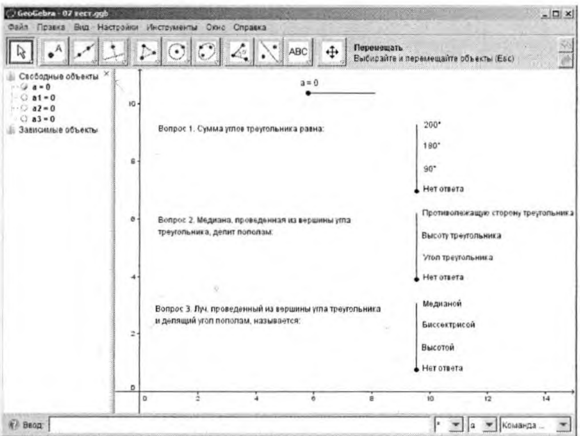


Рис. 33

Для всех надписей с ответами необходимо в диалоге *Свойства* на закладке *Дополнительно* задать *Условие отображения объекта*: надписи с ответами, относящиеся к определенному вопросу, должны становится видимыми, только если значение параметра *a* равно номеру вопроса, а значение параметра ползунка ответа – номеру ответа. На *рисунке 34* представлено условие отображения надписи с ответом номер 2 на вопрос номер 1 ($a \stackrel{?}{=} 1 \wedge a1 \stackrel{?}{=} 2$). Это выражение является более сложным и содержит в своем составе логическую операцию конъюнкцию ($\wedge$), которая может быть выбрана при построении условия видимости из выпадающего списка, расположенного справа от поля ввода условия.

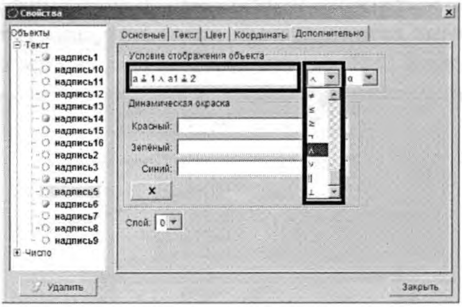


Рис. 34

Для отображения результатов теста вставим в графическое окно под ползунком параметра *a* еще одну надпись: "Правильных ответов: "+(Если[$a1 \stackrel{?}{=} 2$, 1, 0]+Если[$a2 \stackrel{?}{=} 3$, 1, 0]+Если[$a3 \stackrel{?}{=} 2$, 1, 0])+"из 3". Динамическая часть этого текста представлена суммой трех функций логического переменного ("Если"). В зависимости от того, выполняется или нет указанное условие (a1=2 - для первой функции, a2=3 – для второй функции, a3=2 – для третьей функции) она принимает одно из двух значений 1 или 0. Заметим, что проверяемое условие и оба значения функции записаны в строго определенном порядке в квадратных скобках после знака функции. Блок-схема алгоритма работы функции "Если" представлена на *рисунке 35*.

Рис. 35

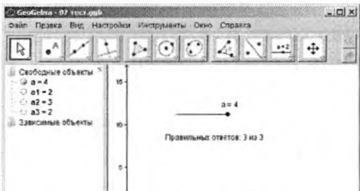


Рис. 36

Чтобы подсчеты количества правильных ответов, выполняемые этой функцией, не играли роль подсказки, можно задать условие отображения этого текста: $a = 4$. Результат успешного тестирования представлен на *рисунке 36*.

1.3. Создание таблиц экспериментальных данных

Создаваемые в программе GeoGebra динамические чертежи и динамические тексты позволяют сделать видимым процесс изменения свойств геометрических объектов или надписей под влиянием изменения значений заданных параметров. Однако часто возникают ситуации, когда для получения выводов требуется не только иметь возможность наблюдать, но и собирать данные о наблюдаемых изменениях (*экспериментальные данные*). Для этой цели предназначена функция «*Таблица*». Для отображения таблицы на экране необходимо в *главном меню* установить «*флажок*» около пункта *Вид – Таблица* (*рис. 37*). В таблицу могут быть занесены самые разные данные: числа (значения геометрических величин и значения выражений из них составленных), координаты точек и векторов.

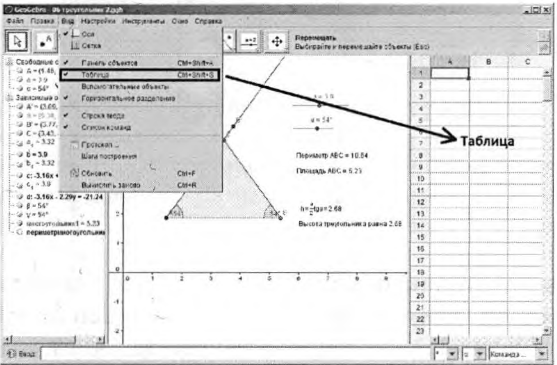
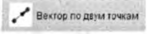


Рис. 37

Рассмотрим технологию заполнения таблиц экспериментальных данных на примере созданного ранее динамического чертежа равнобедренного треугольника, зависящего от двух параметров: a - длина основания треугольника и α – величина угла при основании.

Зададим на этом чертеже вектор $\overrightarrow{BC}$. Для этого в панели инструментов выберем инструмент 

и последовательно укажем в графическом окне сначала точку B, а затем точку C. В результате в панели объектов появится объект типа *Вектор* с указанием координат, а в графическом окне – изображение вектора как направленного отрезка (*рис. 38*).

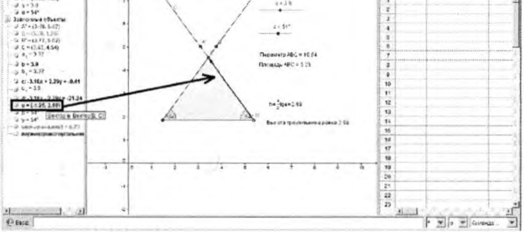


Рис. 38

Предположим, что требуется провести эксперимент с целью сбора данных о зависимости изменения координат точки C и вектора $\overrightarrow{BC}$ от длины основания треугольника при фиксированном значении угла α, равном 60° (т.е. в равностороннем треугольнике).

Выберем на ползунке, отвечающем за изменение углового параметра α, значение 60°. В дальнейшем этот ползунок трогать не будем.

С помощью диалога свойств ползунка, отвечающего за изменение параметра a, зададим интересующие нас наибольшее и наименьшее значение параметра a и шаг изменения его значений (пусть от 1 до 7 с шагом 1) (*рис. 39*).

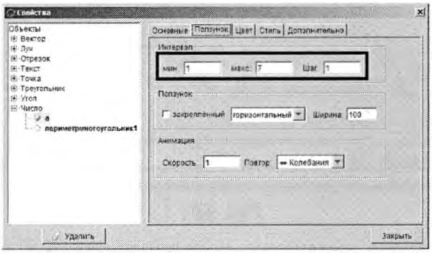
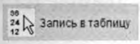


Рис. 39

Теперь зададим условия, позволяющие записывать в таблицу данные о значениях параметра a и соответствующих этим значениям координатах точки C и вектора $\overrightarrow{BC}$. Перед сбором в таблицу данных о значениях параметра a сначала с помощью мыши передвинем соответствующий ему ползунок на минимальное значение, равное 1. Затем выберем на *панели инструментов* инструмент 

и с его помощью укажем в *панели объектов* на объект *Число a*. В результате в таблице отобразиться минимальное значение параметра a. В данном случае минимальное значение 1 будет помещено в первую строку свободной колонки A, то есть в ячейку $A1$ (*рис. 40*).

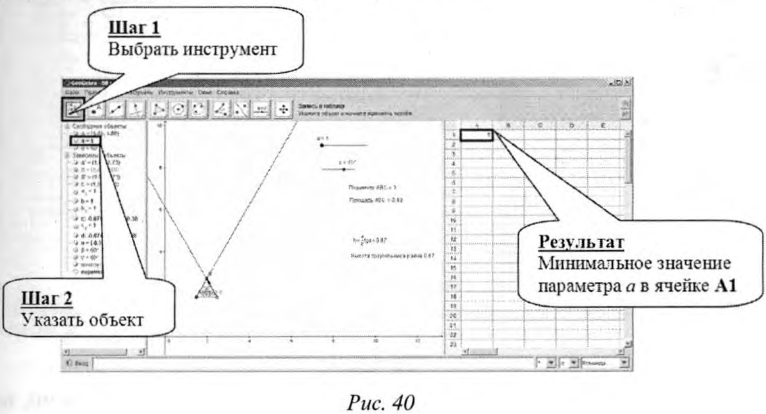


Рис. 40

Для получения последовательности значений параметра a необходимо, не меняя выбранный инструмент, переместить с помощью мыши точку на ползунке к максимальному значению. В результате в таблице в колонке A будет отображена последовательность значений параметра a (*рис. 41*).

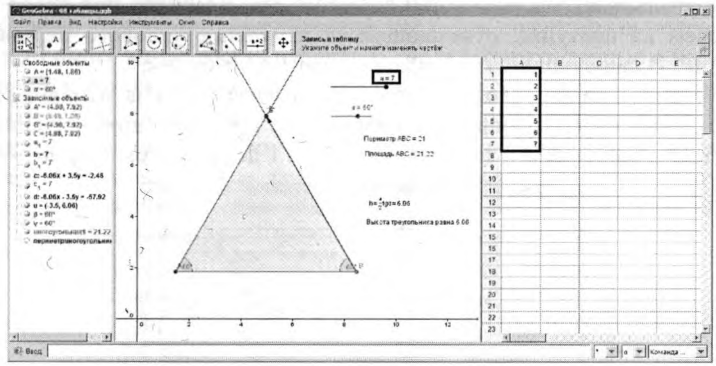
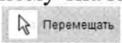
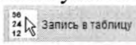


Рис. 41

Для протоколирования изменения координат точки C в зависимости от изменения параметра a необходимо сначала вернуть этот параметр к минимальному значению. Для этого в *панели инструментов* нужно выбрать инструмент 

и с помощью мыши переместить точку на ползунке к минимальному значению. Затем нужно снова выбрать инструмент 

и с его помощью указать в *панели объектов* точку C. Координаты точки C, соответствующие минимальному значению параметра a, будут помещены в ячейки B1 и C1 таблицы (*рис. 42*).

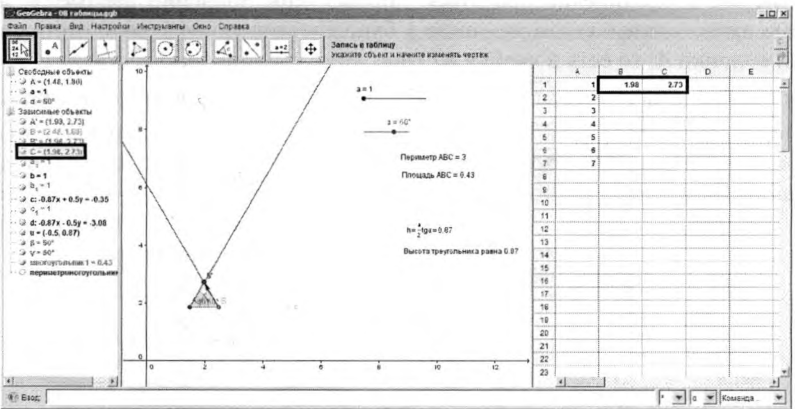


Рис. 42

Для получения последовательности координат точки C необходимо, не меняя выбранный инструмент, переместить с помощью мыши точку на ползунке параметра *a* к максимальному значению. В результате в таблице в колонках *B* и *C* будут отображены значения абсциссы и ординаты точки *C*, соответствующие значениям параметра *a*, указанным в колонке *A* (*рис. 43*).

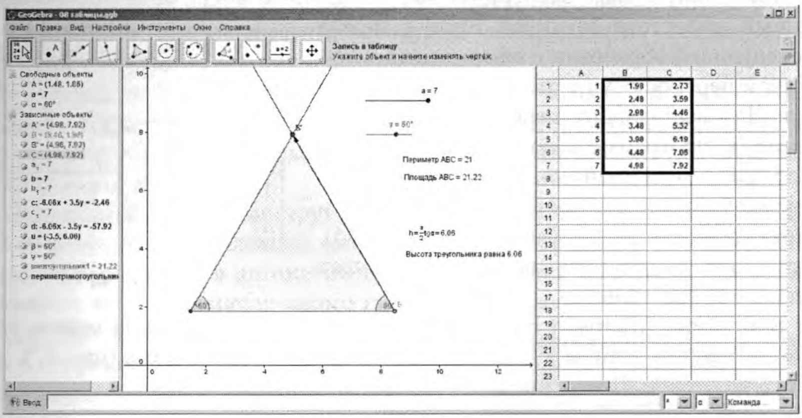


Рис. 43

Аналогичным образом может быть получен протокол изменения координат вектора *BC*. Единственным отличием в последовательности выполняемых действий будет только выбор в панели объектов вектора *BC* (*рис. 44*).

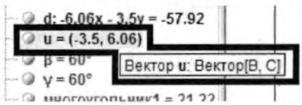


Рис. 44

В результате протоколирования в таблице в колонках *D* и *E* будут отображены координаты вектора *BC*, соответствующие значениям параметра *a* (*рис. 45*).

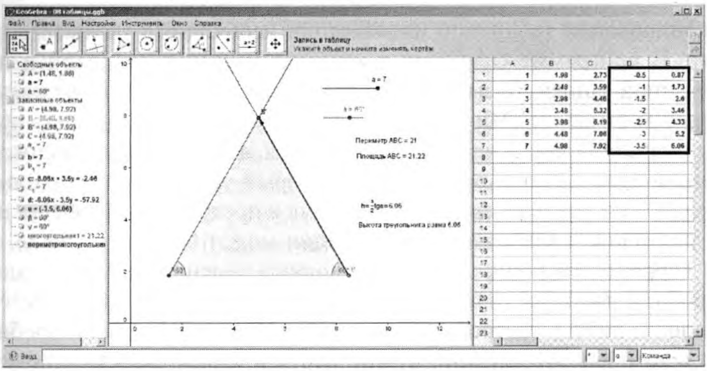


Рис. 45

Полученный в таблице результат может быть сохранен вместе с геометрической моделью в файле в формате GeoGebra, который имеет расширение *.ggb Кроме того, полученные экспериментальные данные могут быть перенесены в табличный процессор Microsoft Excel с целью их последующей обработки и оформления.

Такой перенос осуществляется через буфер обмена. Для выполнения переноса данных необходимо в программе GeoGebra выделить в таблице требуемый диапазон ячеек, нажать правой кнопкой мыши и в появившемся контекстном меню выбрать пункт *Копировать* (*рис. 46*). В результате выделенная информация будет помещена в буфер обмена.

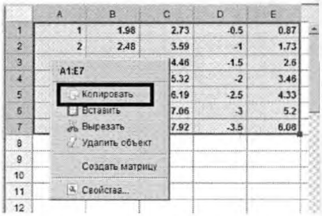


Рис. 46

В программе Microsoft Excel информацию из буфера обмена можно вставить на лист путем выбора в контекстном меню пункта *Вставить* (*рис. 47*).

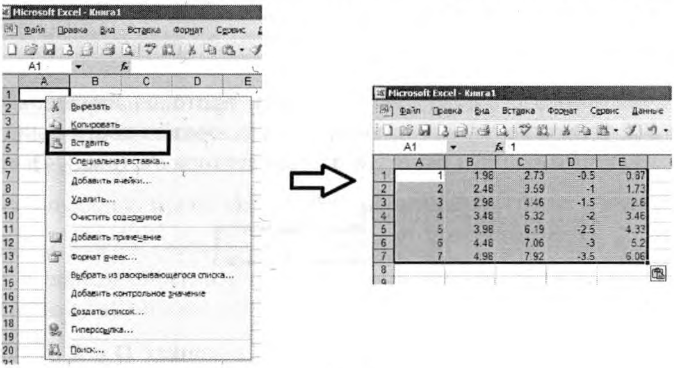


Рис. 47

При копировании табличной информации необходимо учитывать следующий нюанс. В программе GeoGebra в качестве разделителя целой и дробной части десятичной записи числа используется точка. В русских редакциях операционных систем семейства Microsoft Windows по умолчанию в качестве разделителя целой и дробной части используется запятая, а в программе Microsoft Excel по умолчанию используется разделитель, который указан в операционной системе. В случае если разделители, используемые в программах GeoGebra и Microsoft Excel, различны, копирование информации может быть выполнено с ошибками. Для корректного копирования необходимо заменить символ-разделитель целой и дробной части на точку либо в настройках операционной системы Microsoft Windows, либо в настройках программы Microsoft Excel. Подробную информацию о том, как это сделать, можно найти в справочных руководствах по соответствующей операционной системе Microsoft Windows и используемому пакету программ Microsoft Office, в состав которого и входит Microsoft Excel.

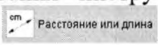
1.4. Интерпретация данных и описание свойств

Помимо интерактивных возможностей по созданию динамических чертежей геометрических объектов программа GeoGebra позволяет:

- *выявлять дополнительные свойства* изображенных геометрических объектов (как метрические, так и позиционные);
- осуществлять *интерпретацию* свойств, т.е. менять язык их описания: геометрический, алгебраический, векторный или координатный (менять язык описания свойств изображенных объектов, а также изображать объекты, заданные в терминах этих языков).

Основные свойства конструктивных элементов чертежа, такие как длина отрезка, величина угла, площадь многоугольника, координаты точки, уравнение прямой или окружности автоматически отображаются на панели объектов (независимо от того, в терминах какого языка были заданы эти объекты).

Достаточно просто можно вывести в графическом окне дополнительно информацию о площади и периметре многоугольника или сектора, длине окружности или дуги путем использования инструментов 

и 

. Если нужные свойства элементов чертежа уже указаны в *панели объектов*, то можно вывести их в *графическом окне*. Для этого в диалоговом окне свойств объекта необходимо установить «флажок» *Показывать обозначение*. Для отображения координат, длины отрезка или величины угла надо в выпадающем списке выбрать пункт *Значение* (*рис. 48*).

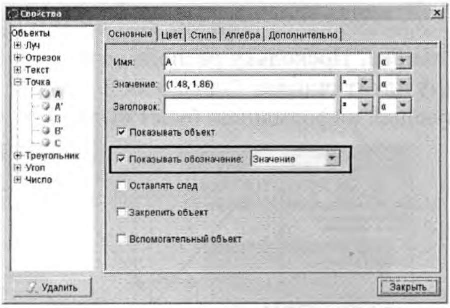


Рис. 48

Для получения сведений об отношении метрических и позиционных свойств объектов можно использовать инструмент 

. После выбора этого инструмента необходимо последовательно указать в графическом окне или в панели объектов два объекта, свойства которых будут подвергнуты анализу.

Выполним сравнение двух углов треугольника *ABC*: угла *CAB* (угла β) и угла *CBA* (угла γ). Для этого последовательно с помощью мыши укажем в графическом окне эти углы. В результате в диалоговом окне будет выведено сообщение об идентичности (равенстве) этих углов (*рис. 49*).

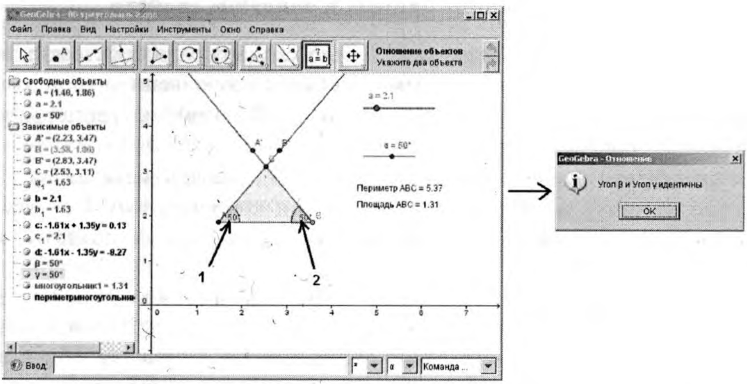


Рис.49

Аналогичным образом можно сравнить стороны (отрезки) *AC* и *BC* треугольника. Поскольку расположение указанных отрезков различное, то они не будут идентичными. Однако их длина будет одинаковой. Сообщение с соответствующей информацией будет выдано программой GeoGebra (*рис. 50*).

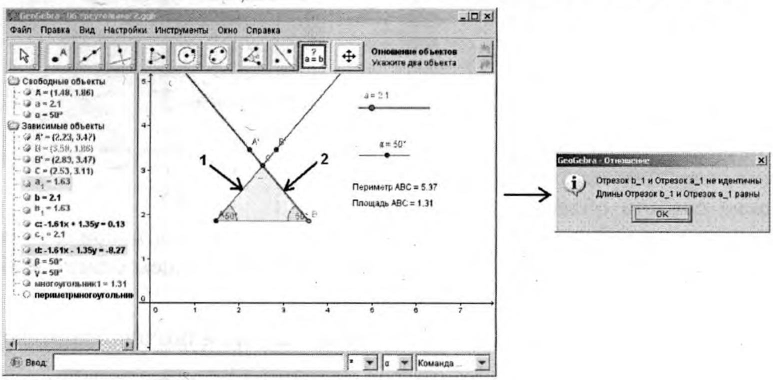


Рис. 50

Если же для сравнения выбрать лучи AC и BC, то будет выведено сообщение о том, что они пересекаются (*рис. 51*).

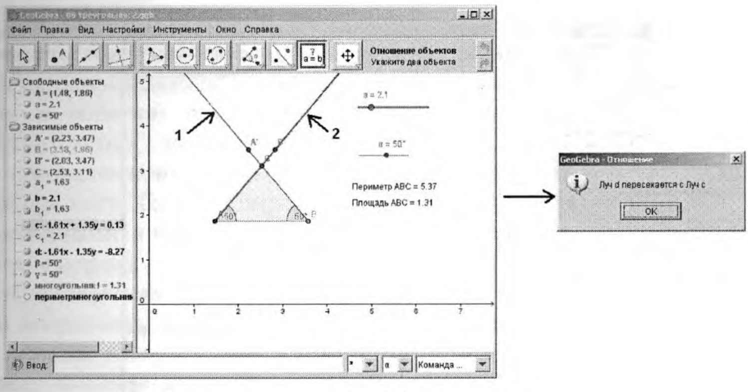


Рис. 51

Для сравнения также могут быть выбраны объекты различных типов. Например, если для сравнения выбрать луч AC и точку C, то будет выведено сообщение о принадлежности точки к лучу (*рис. 52*).

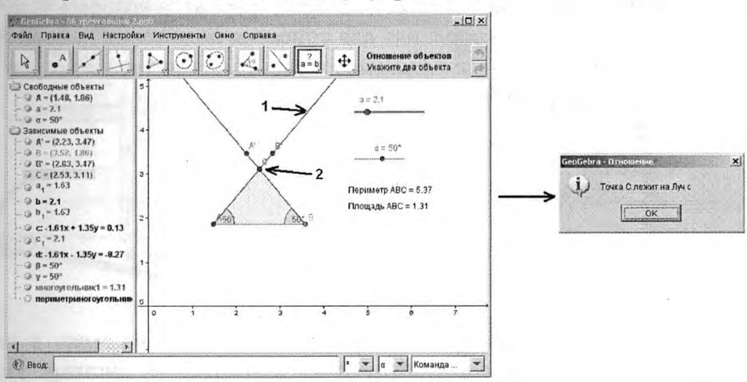
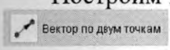


Рис. 52

Таким образом, использование инструмента *Отношение объектов* позволяет пользователю оценить результаты геометрического построения и сделать соответствующие выводы.

Рассмотрим теперь интерпретационные возможности программы.

Обратимся вновь к возможности вывода диалогового окна свойств объектов путем выбора в его контекстном меню пункта *Свойства*. В этом диалоговом окне свойств может быть представлена закладка *Алгебра*. Эта закладка доступна для таких объектов, как *точка*, *вектор*, *прямая, луч, окружность, эллипс, парабола, гипербола*. Рассмотрим возможности интерпретации свойств объектов, предоставляемые с помощью закладки *Алгебра*.

Построим вектор по двум точкам. Для этого выберем в панели инструмент 

и последовательно укажем в графическом окне две произвольные точки *A* и *B*. Результат построения вектора *AB* представлен на *рисунке 53*.

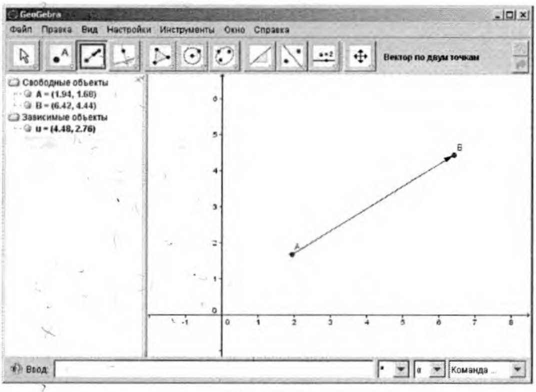


Рис. 53

Выбрав в графическом окне или в панели объектов точку *A*, с помощью контекстного меню вызовем диалог свойств этого объекта. На закладке *Алгебра* в выпадающем списке *Координаты* можно выбрать формат, в котором будут отображаться доступные системы координат для описания положения данной точки: *декартовы координаты*, *полярные координаты* или *комплексное число* (*рис. 54*).

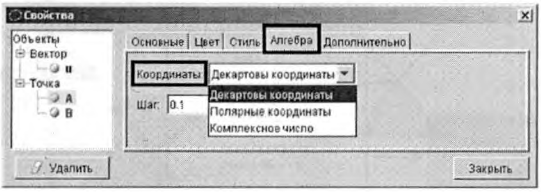
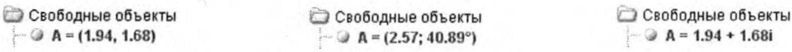


Рис. 54

После выбора системы координат и нажатия кнопки *Закрыть* в панели объектов будут отображены координаты точки в выбранной системе. Различные варианты отображения координат точки *A* представлены на рисунке 55.



а) декартовы координаты б) полярные координаты в) комплексное число

Рис. 55

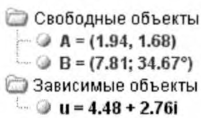


Рис. 56

Аналогичным образом систему координат можно задать и для вектора AB (вектор u в панели объектов). Для вектора допустимы те же системы координат, что и для точки. Для каждого объекта на чертеже может быть выбрана своя система координат. На *рисунке 56* представлен вид панели объектов для случая, когда координаты точки *A* отображены в декартовой системе, координаты точки *B* – в полярной системе, а координаты вектора *AB* представлены в виде комплексного числа.

Кроме того, в программе GeoGebra предусмотрена возможность быстрого перевода координат точки или вектора их одной системы в другую (из декартовой в полярную, и обратно) путем выбора соответствующего пункта контекстного меню точки или вектора (*рис.57*).

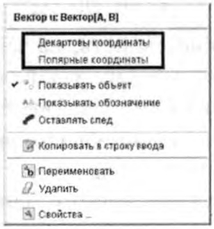


Рис. 57

С помощью контекстного меню координаты точки или вектора могут быть скопированы в *строку ввода*. Для этого необходимо в контекстном меню выбрать пункт *Копировать в строку ввода*. В результате в строке ввода будут отображены текущие координаты выбранного объекта. Эти координаты можно редактировать с целью создания новых объектов. После нажатия клавиши Enter в *графическом окне* и в *панели объектов* будет отображен новый объект. На *рисунке 58* представлен процесс копирования координат точки *A* в *строку ввода*, увеличения ординаты точки на 1 и создания точки *C* с новыми координатами.

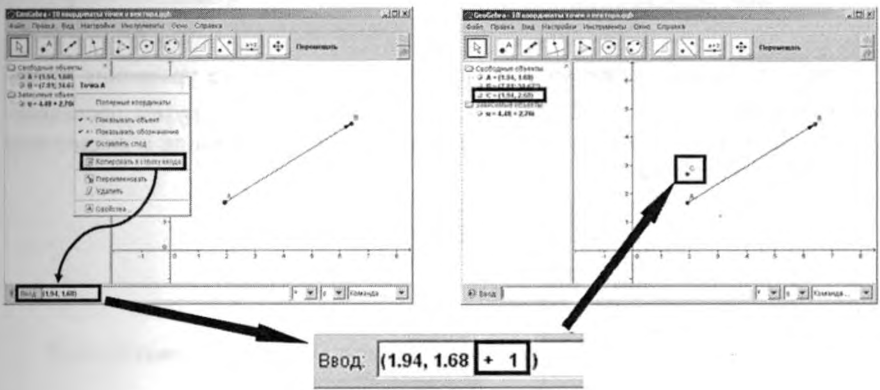
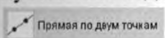
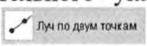


Рис. 58

Рассмотрим информацию, отображаемую на закладке *Алгебра* диалогового окна свойств для объектов *прямая* и *луч*. Эти объекты могут быть построены путем последовательного указания двух точек с помощью инструментов 

и 

соответственно. На *рисунке 59* представлен результат построения прямой *AB* и луча *CD*.

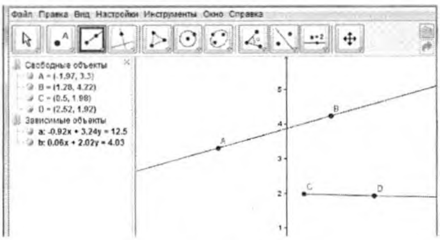


Рис. 59

Через контекстное меню этих объектов может быть вызвано диалоговое окно свойств, на закладке *Алгебра* которого предоставляется возможность выбора форму задания уравнения прямой (для луча – прямой, содержащей луч): $ax + by = c$, $y = mx + b$ или *Параметрическая форма.* Для прямой и луча вид закладки алгебра имеет одинаковый вид (*рис. 60*).

Быстрая смена формы уравнения прямой может быть осуществлена также из контекстного меню объекта (*рис. 61*).

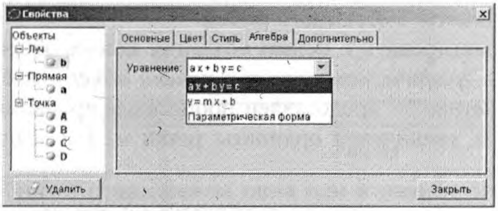


Рис. 60

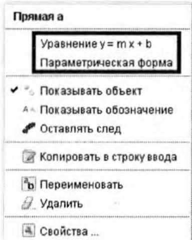
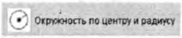


Рис. 61

Для окружности также возможны различные формы ее уравнения. С помощью инструмента 

построим окружность путем последовательного указания в графическом окне центра (точки *A*) и ввода в диалоговом окне величины радиуса (*рис. 62*).

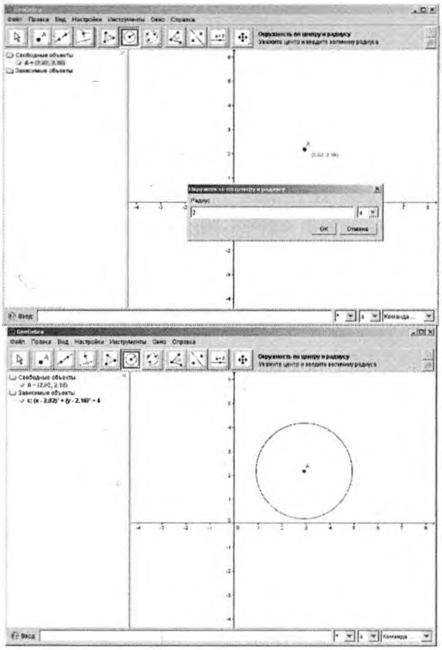


Рис. 62

В диалоговом окне свойств окружности на закладке *Алгебра* предоставляется возможность выбора двух форм записи уравнения окружности: $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$ или $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=f$ (*рис. 63*). Смена формы записи уравнения окружности также возможна из контекстного меню этого объекта.

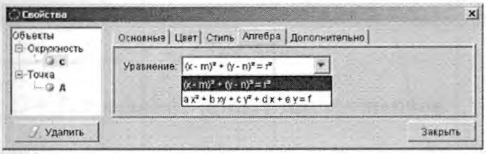


Рис. 63

Построение эллипса можно выполнить путем непосредственного задания через строку ввода уравнения эллипса, например, $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$. После нажатия клавиши Enter в графическом окне будет построен эллипс (*рис. 64*).

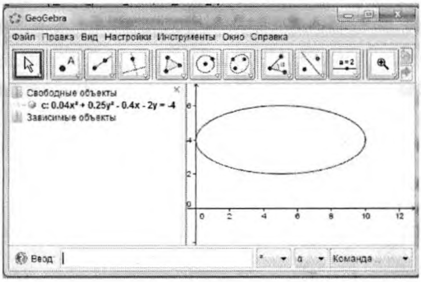


Рис. 64

В диалоговом окне свойств эллипса на закладке *Алгебра* возможен выбор двух форм его уравнения: $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ или $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=f$ (*рис. 65*). Форму уравнения также возможно быстро изменить через контекстное меню объекта.

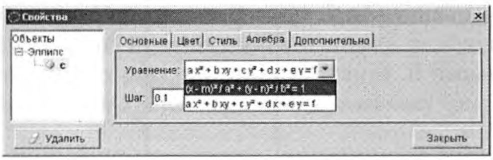


Рис. 65

Построение парабол и гипербол также может быть выполнено путем непосредственного ввода их уравнений. На *рисунке 66* представлены результаты построения парабол, задаваемых уравнениями $y=x^2$ и $x=y^2$.

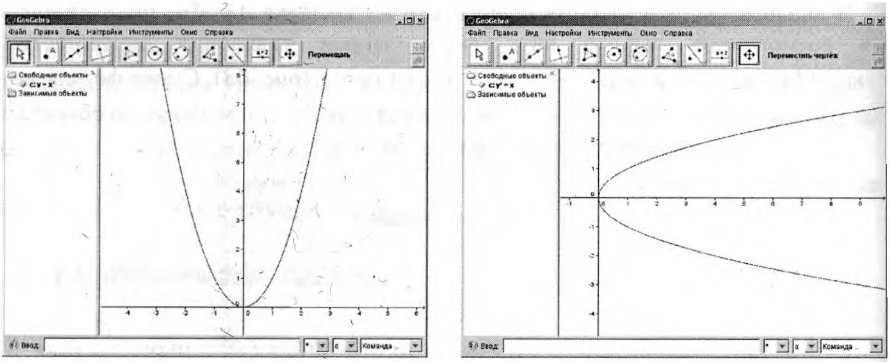


Рис. 66

Закладка *Алгебра* диалога свойств парабол также позволяет отобразить их уравнения в различной форме (*рис .67*).

Рис. 67

На *рисунке 68* изображены результаты построения двух гипербол, задаваемых уравнениями $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ и $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{9}=1$.

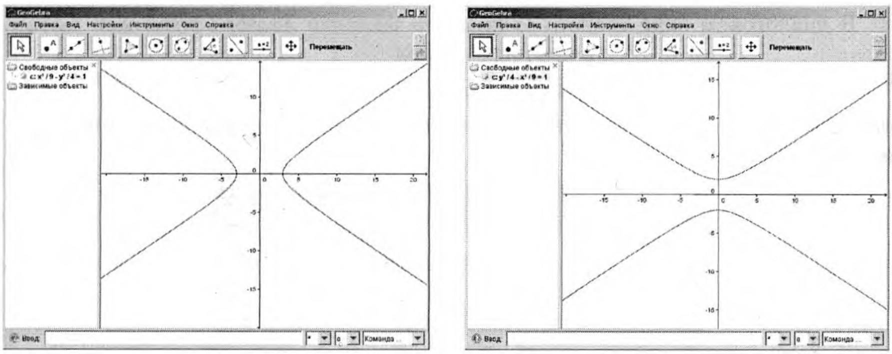


Рис. 68

Рисунок 69 демонстрирует закладку *Алгебра* диалога свойств гипербол и возможности представления уравнений гипербол в различном виде.

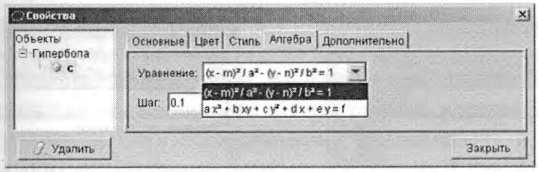


Рис. 69

1.5. Создание новых инструментов

Панель инструментов предоставляет пользователю достаточно много функциональных возможностей по созданию различных геометрических объектов в интерактивном режиме. Однако зачастую каждому хочется настроить программу под свои определенные цели. Предположим, что в процессе геометрического моделирования пользователю потребуется создавать достаточно большое количество равнобедренных треугольников, зная одну из вершин основания, длину основания и угол при основании.

Процесс построения такого треугольника был рассмотрен нами достаточно подробно. Он состоит из нескольких шагов, связанных с построением основания, углов, лучей, определения точки пересечения лучей и окончательного построения многоугольника (треугольника) по трем вершинам. При построении каждого треугольника эти действия необходимо будет повторять.

Программа GeoGebra предлагает возможность по созданию собственных инструментов для создания объектов, разработанных пользователем. Такие инструменты могут быть размещены в панели инструментов с целью их последующего многократного использования.

Рассмотрим технологию создания собственных инструментов на примере создания инструмента для построения равнобедренного треугольника. Построим в программе GeoGebra чертеж равнобедренного треугольника по положению вершины его основания, длине основания и прилежащему углу (или откроем в программе ранее сохраненный чертеж).

Выберем в главном меню пункт *Инструменты – Создать инструмент*. В результате появится диалоговое окно, в котором по шагам выполняется создание нового инструмента. Изначально в этом окне активирована закладка *Выходные объекты*, на которой из выпадающего списка необходимо выбрать объект, который будет являться результатом построения. В нашем случае в качестве такого объекта выступает *Треугольник многоугольник1* (*рис. 70*).

Рис. 70

После выбора выходного объекта и нажатия на кнопку *Следующий* будет активирована закладка *Входные объекты*. На этом шаге создания нового инструмента показываются те объекты, на основании которых строится выходной объект. В нашем случае это *Число а*, *Угол* α и *Точка А*. Список входных объектов формируется программой GeoGebra автоматически. Последовательность расположения входных объектов влияет на последовательность выполнения действий при создании геометрического объекта в интерактивном режиме. Поэтому в нашем случае будет логично сначала указывать вершину основания равнобедренного треугольника, а потом только длину основания и угол при основании. Используя кнопки  и  и выделяя в списке необходимый входной объект, можно изменить расположение входных объектов в списке (*рис. 71*).

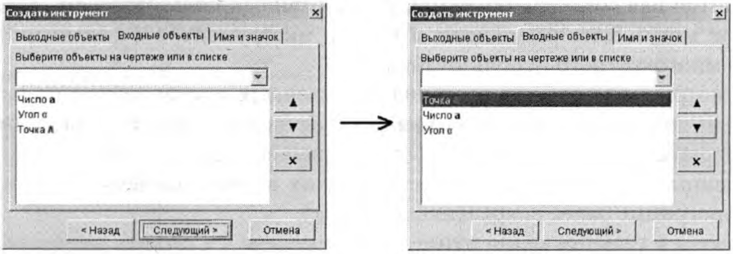


Рис. 71

Нажатие кнопки *Следующий* приведет к активированию закладки *Имя и значок*. На этой закладке необходимо задать следующие характеристики:

- *Имя инструмента*, которое будет отображаться в панели инструментов;
- *Имя команды*, с помощью которой выходной объект может быть построен путем непосредственного вода в *строке ввода*;
- *Описание*, в котором лучше указать последовательность выбора входных объектов при построении в интерактивном режиме.

Для нового инструмента по умолчанию программа GeoGebra предлагает использовать значок вида . Это изображение может быть заменено другим, предварительно созданным, например, в программе Microsoft Paint,

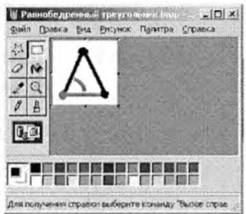


Рис. 72

входящей в стандартный набор программ операционной системы Microsoft Windows (*рис. 72*).

Рисунок, созданный в программе Microsoft Paint, необходимо сохранить в виде файла на диск для последующего использования в качестве значка нового инструмента. Программа GeoGebra позволяет использовать в качестве значка файлы с изображениями следующих типов: gif, *.jpeg, *.jpg, *.tif, *.png, *.bmp. Файлы с изображениями всех этих типов могут быть созданы с помощью программе Microsoft Paint.

В программе GeoGebra выбор файла, содержащего изображение значка, производится с помощью стандартного диалога открытия файла, вызываемого при нажатии кнопки Значок ... . Важно также не забыть установить «флажок» *Показывать на панели инструментов*, иначе кнопка на панели не появится. Результат заполнения информации на закладке *Имя и значок* показан на *рисунке 73*.

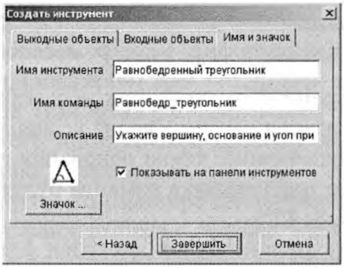


Рис. 73

После нажатия кнопки *Завершить* будет выведено окно сообщения об успешном создании инструмента, а в панели инструментов появится новый инструмент с пояснением о последовательности выполнения действий при создании объекта (*рис. 74*).

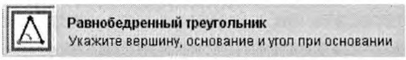


Рис. 74

Если выбрать этот инструмент, то в графическом окне можно будет построить равнобедренный треугольник путем выполнения трех действий: выбора вершины, задания длины основания и задания величины угла при основании (*рис. 75*).

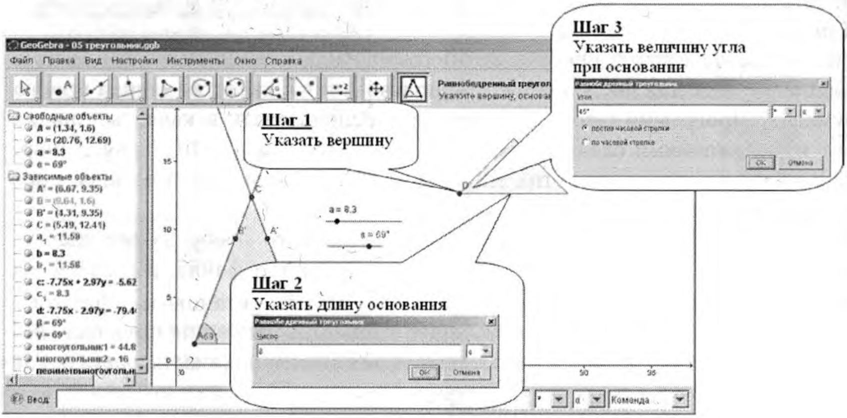


Рис. 75

Кроме того, равнобедренный треугольник может быть построен посредством непосредственного указания в строке ввода команды, в которой будут указаны точка – вершина треугольника, длина основания и величина угла при основании. Для построенного треугольника команда будет иметь следующий вид: Равнобедр_треугольник[D, 8, 45°].

Созданный новый инструмент будет доступен для использования до тех пор, пока программа GeoGebra не будет завершена. При следующем запуске этот инструмент исчезнет. Для того чтобы это не произошло необходимо сохранить настройки программы путем выбора в *главном меню* пункта *Настройки – Сохранить настройки*.

Зачастую возникает необходимость в использовании такого же нового инструмента на других компьютерах, на которых также установлена программа GeoGebra. Чтобы не повторять на каждом компьютере все шаги по созданию чертежа и последующему созданию инструмента, можно перенести информацию о новом инструменте с одного компьютера на другой. Для этого информацию о новом инструменте следует сохранить на диск в виде файла в формате GeoGebra с расширением *.ggt. Чтобы выполнить сохранение на диск информации о новом инструменте, необходимо выбрать в *главном меню* пункт *Инструменты – Управление инструментами* и в появившемся окне, указав нужный инструмент в списке, нажать на кнопку *Сохранить как*. В стандартном диалоге выбора файла для сохранения необходимо указать имя файла, в котором будет сохранена информация об инструменте, и нажать кнопку *Сохранить* (*рис. 76*).

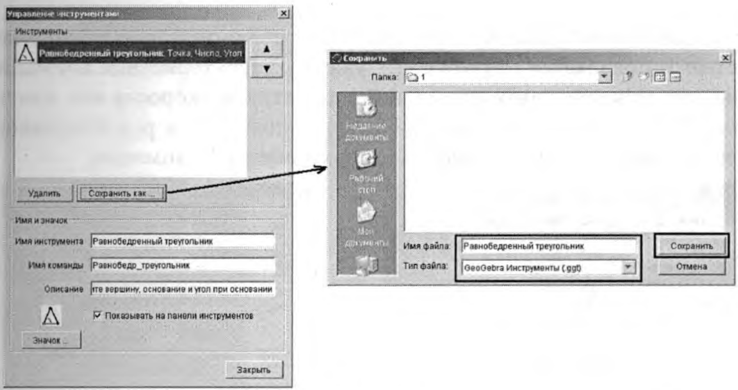


Рис. 76

Созданный таким образом файл с информацией об инструменте может быть передан другим пользователям для установки на их компьютеры и использования в работе. При этом файл с информацией об инструменте содержит и изображение значка этого инструмента, поэтому передавать дополнительно файл с изображением значка не требуется.

Для установки на другом компьютере инструмента из файла *.ggt необходимо просто открыть этот файл, выбрав в *главном меню* программы пункт *Файл – Открыть*. В результате инструмент появится в панели инструментов. Далее следует выбрать в *главном меню* пункт *Настройки – Сохранить настройки*. После этого инструмент будет отображаться в *панели инструментов* при каждом запуске программы GeoGebra. Сам файл с расширением *.ggt больше не потребуется.

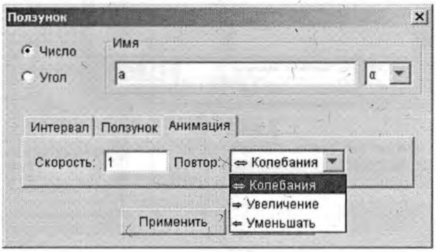
1.6. Создание анимации

Программа GeoGebra поддерживает технологию получения движущихся изображений с использованием построенных геометрических объектов – анимацию. Анимация тесно связана с построением динамических чертежей и использованием ползунков.

Особенностью динамического чертежа является изменение вида геометрического построения при изменении значений числовых и/или угловых параметров, осуществляемом с помощью ползунков. Изменение параметров осуществляется пользователем вручную путем перемещения точки по ползунку с помощью мыши или клавиатуры (клавишами со стрелками). В этом случае возникает движущееся изображение. Такой вид анимации в программе GeoGebra получил название *ручной* анимации.

Помимо *ручной*, в программе GeoGebra можно организовать *автоматическую* анимацию. В этом случае пользователю не придется предпринимать каких-либо действий для поддержания движущегося изображения. Достаточно будет только выполнить запуск анимации. Рассмотрим подробнее вопросы организации *автоматической* анимации.

При создании ползунка или при вызове через контекстное меню диалога с его свойствами появляется возможность указать характеристики анимации, отражающие вид циклического изменения параметра и скорость его изменения. На *рисунке 77* представлены диалоги создания ползунка и редактирования его свойств, на которых могут быть заданы характеристики анимации.



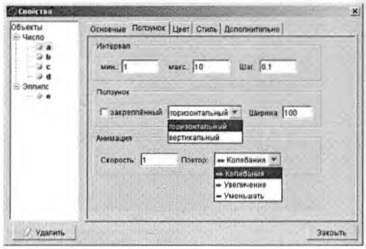


Рис. 77

В этих диалоговых окнах из выпадающего списка *Повтор* можно выбрать один из следующих видов циклического изменения параметра:

- *колебания* (циклическое изменение значения параметра от минимального до максимального и обратно);
- *увеличение* (циклическое изменение значения параметра от минимального до максимального; при достижении максимального значения происходит скачкообразный переход к минимальному);
- *уменьшать* (циклическое изменение значения параметра от максимального до минимального; при достижении минимального значения происходит скачкообразный переход к максимальному).

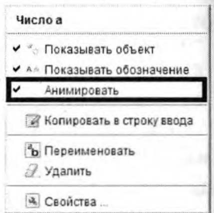


Рис. 78

Поле ввода *Скорость* позволяет указать скорость изменения параметра, то есть скорость анимации. При скорости, равной 1, параметр пройдет весь интервал своих допустимых значений примерно за 10 секунд.

Для запуска анимации в автоматическом режиме необходимо в контекстном меню ползунка выбрать пункт *Анимировать* и поставить около него «галочку» (*рис. 78*). В результате начнется автоматическое изменение параметра в соответствии с заданными характеристиками анимации. Для прекращения изменения параметра, задаваемого ползунком, необходимо в контекстном меню снова выбрать пункт *Анимировать* и убрать «галочку» около него.

Если динамический чертеж, на основе которого создается анимация, зависит от нескольких параметров, то можно запускать и останавливать процесс циклического изменения каждого параметра в отдельности.

Чтобы полностью приостановить процесс анимации, то есть приостановить циклическое изменение всех параметров, необходимо в левом нижнем углу *графического окна* нажать кнопку *Пауза* ⏸. Для возобновления анимации следует нажать кнопку *Проиграть* ▷, расположенную в том же месте вместо кнопки *Пауза* (*рис. 79*).

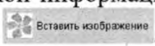
Рис. 79

Стоит также упомянуть об одной особенности программы GeoGebra. В ходе проигрывания автоматической анимации программа GeoGebra сохраняет свою функциональность в полном объеме, то есть пользователь может продолжать изменять эту же геометрическую модель.

1.7. Импорт и экспорт информации

Важной функцией любой компьютерной программы является обмен информацией с другими программами. Обычно механизм обмена реализуется с помощью функций выгрузки (*экспорта*) информации в виде файлов, воспринимаемых другими программами, и загрузки (*импорта*) файлов с информацией, воспринимаемой данной программой. Программам GeoGebra не является исключением. Однако возможности импорта и экспорта информации реализованы в программе GeoGebra специфическим образом, что определяется теми задачами, для решения которых она создана.

1.7.1. Импорт графической информации

Рассмотрим возможности импорта графической информации, реализованные в программе GeoGebra в виде инструмента: 

. После выбора этого инструмента в *панели инструментов*, необходимо указать в *графическом окне* точку, в которой будет расположен левый нижний угол импортируемого изображения. После этого появится стандартный диалог открытия файла, в котором будет предложено выбрать файл одного из следующих типов: *.gif, *.jpeg, *.jpg, *.tif, *.png, *.bmp. Импортированное изображение может быть использовано как в оформительских целях, так и в целях выполнения построения геометрической модели реального объекта или его элементов.

Предположим, что нам необходимо определить угол наклона знаменитой пизанской башни. С помощью инструмента «*Вставить изображение*» укажем точку левого нижнего угла изображения, а затем в диалоге открытия файла выберем файл изображения *"Пизанская башня.jpg"* и нажмем кнопку «*Открыть*». В результате в графическом окне появится изображение башни (*рис. 80*).

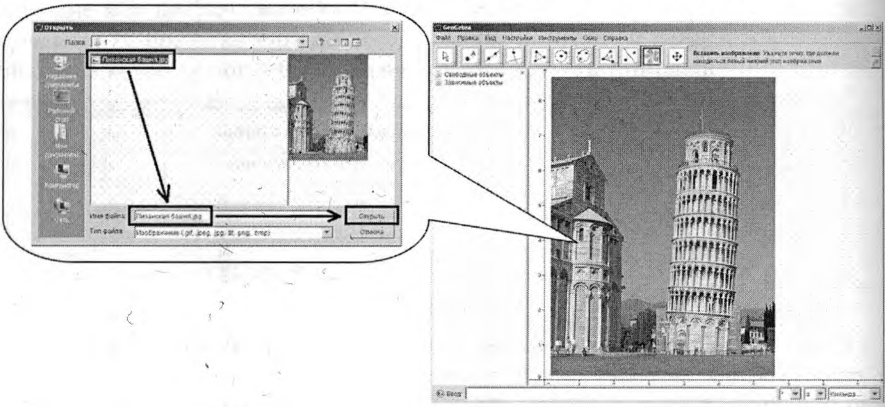


Рис. 80

В диалоговом окне свойств, вызываемом через контекстное меню, можно изменять свойства изображения. На закладке *Координаты* можно указать координаты левого нижнего (*Угол 1*), правого нижнего (*Угол 2*) и левого верхнего (*Угол 4*) углов изображения, что позволяет изменять положение и размеры данного изображения. На закладке *Стиль* диалога свойств с помощью регулятора *Заливка* можно настраивать "яркость" вставленного изображения: чем меньше значение свойства *Заливка*, тем более прозрачным выглядит изображение в *графическом окне* (*рис. 81*). Уменьшим "яркость" изображения пизанской башни до значения 75 для того, чтобы последующие построения были более четко видны на фоне рисунка.

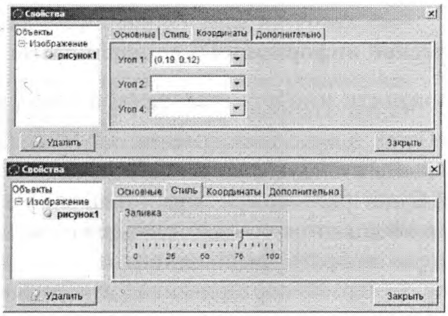
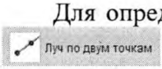


Рис. 81

Для определения угла наклона пизанской башни, используя инструменты 

и 

, можно построить два луча и определить величину угла между ними. Результат такого построения показан на *рисунке 82*.

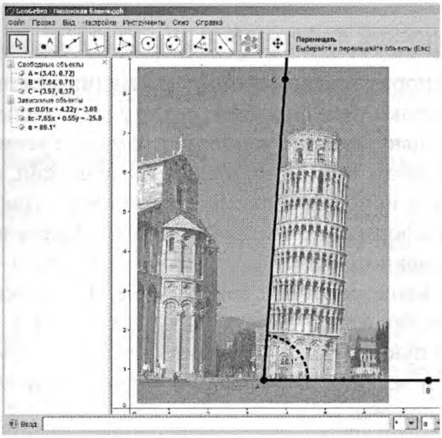
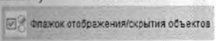


Рис. 82

В данном случае в графическом окне недостаточно хорошо видно значение угла наклона. Для того чтобы скрыть изображение и получить более наглядную картину выполненных геометрических построений, можно с помощью инструмента 

создать в графическом окне «флажок», который будет отвечать за видимость изображения. При создании «флажка» отображения/скрытия объектов необходимо указать заголовок, который будет выводиться около «флажка» и выбрать из выпадающего списка объекты, видимостью которых будет управлять «флажок» (*рис. 83*).

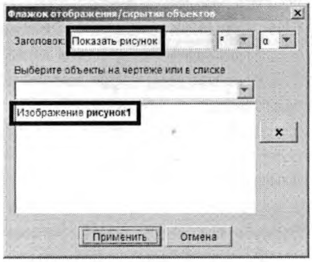


Рис. 83

Скрыв с помощью «флажка» изображение пизанской башни, можно оставить в графическом окне только результаты геометрических построений (*рис. 84*).

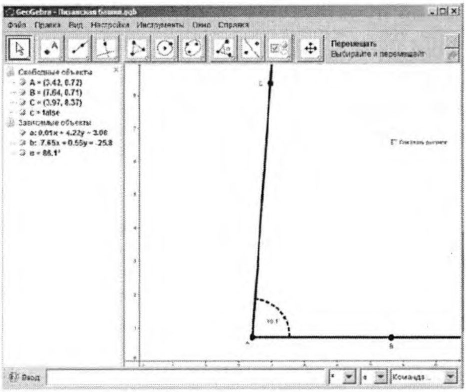


Рис. 84

1.7.2. Экспорт графической информации

Возможности экспорта графической информации реализованы в программе GeoGebra более широко. Все функции, связанные с экспортом информации, можно вызвать с помощью главного меню программы. Рассмотрим их.

Простейшим способом экспортирования графической информации в другие программы является использование буфера обмена. Для того чтобы скопировать графическую информацию из программы GeoGebra в буфер обмена, необходимо выбрать в главном меню пункт *Файл – Экспорт – Копировать в буфер*. В буфер обмена копируется все содержимое графического окна программы. В дальнейшем изображение может быть вставлено в любую другу программу, поддерживающую работу с изображениями. На *рисунке 85* представлен процесс копирования и вставки изображения в программу Microsoft Word с использованием буфера обмена.

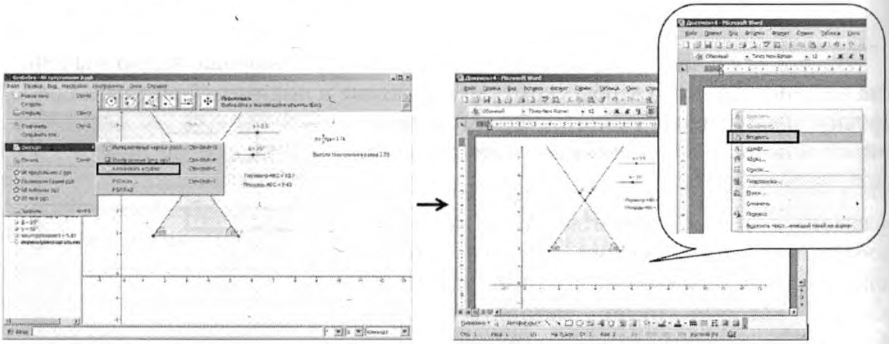


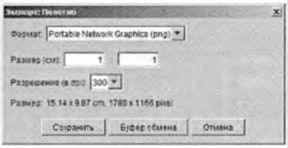
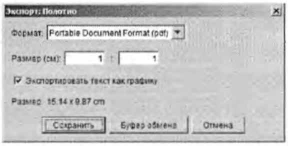
Рис. 85

Также программа GeoGebra поддерживает функции экспортирования графической информации в файлы изображений следующих типов: *.png, *.pdf, *.eps, *.svg, *.emf. Экспорт в файлы указанных типов осуществляется путем выбора в главном меню пункта *Файл – Экспорт – Изображение (png, eps)*. После этого в диалоговом окне следует указать тип файла, в который будет производиться экспорт, и специфические для выбранного типа параметры изображения (размер, разрешение, способ экспортирования текстовой информации). После нажатия кнопки *Сохранить* предлагается указать имя файла в стандартном диалоге сохранения.

В *таблице 1* представлен вид диалогового окна экспорта для файлов различных типов, а также приведено краткое описание форматов хранения графической информации.

Таблица 1

Типы файлов для экспорта графической информации

Тип графического файла (расширение)	Вид диалогового окна экспорта	Краткое описание формата
Portable Network Graphics (*.png)		Формат PNG позволяет хранить графическую информацию в сжатом виде. При этом сжатие информации производится без потери качества. Формат PNG позиционируется как формат для использования в сети Интернет.
Portable Document Format (*.pdf)		Формат PDF, разработанный фирмой Adobe Systems, предназначен для представления в электронном виде полиграфической продукции. Может использоваться на различных компьютерных платформах (кроссплатформенный формат).
Encapsulated Postscript (*.eps)		Формат EPS предназначен для использования в профессиональных издательских системах. Позволяет хранить информацию о растровых и векторных изображениях, а также комбинации этих изображений.
Scalable Vector Graphics (*.svg)		Формат SVG является векторным форматом, в котором используется графический язык описания изображений с помощью векторных форм, текста и встроенных растровых изображений. Формат SVG позволяет увеличить любую часть изображения без потери качества.
Enhanced Metafile (*.emf)		Формат EMF представляет собой результат развития формата WMF (Windows Metafile), разработанного компанией Microsoft для хранения коллекций графических изображений. Формат EMF предназначен для хранения комбинаций векторной и растровой графики.

Разработчики программы GeoGebra не оставили без внимания и систему компьютерной верстки TEX, имеющую особую популярность в среде создателей математической литературы. Экспорт графической информации в формат TEX выполняется в программе GeoGebra путем создания последовательности графических команд для двух пакетов расширения формата TEX: PSTricks и

PGF/TikZ[2]. Для выполнения экспорта графической информации в формат одного из указанных пакетов необходимо выбрать в *главном меню* программы GeoGebra пункт *Файл – Экспорт – PSTricks* или *Файл – Экспорт – PGF/TikZ.* В диалоговых окнах экспорта информации можно указать различные параметры формируемого изображения (*рис. 86*).

Рис. 86

Далее в этих диалоговых окнах необходимо выполнить генерацию кода изображения в формате пакета PSTricks или пакета PGF/TikZ (путем нажатия кнопок Генерировать код PSTricks или Генерировать код PGF/TikZ соответственно), после чего сгенерированный код можно сохранить в файл с расширением *.tex (нажать кнопку Сохранить как) или скопировать в буфер обмена (нажать кнопку Копировать в буфер) с целью дальнейшего использования в специализированных редакторах формата TEX.

1.7.3. Создание Java-апплетов

Программа GeGebra предоставляет пользователю еще одну специфическую возможность экспорта графической информации – создание Java-апплетов.

Java-апплет представляет собой программу, которая выполняется установленной на компьютере Java-машиной. Результаты выполнения этой программы отображаются в окне Web-браузера (например, браузера Microsoft Internet Explorer). Созданный с помощью программы GeoGebra Java-апплет, может быть в последующем размещен на каком-либо Web-сайте. В результате пользователи, посещающие этот сайт, смогут работать с интерактивным чертежом с помощью Web-браузера.

Рассмотрим технологию создания Java-апплетов на примере геометрической модели равнобедренного треугольника. Для того чтобы создать Java-апплет, позволяющий работать с этой моделью в Web-браузере, необходимо в программе GeoGebra выбрать пункт меню *Файл – Экспорт – Интерактивный чертеж (html)*. В диалоговом окне экспорта на закладке *Общие* можно указать основные данные о геометрическом чертеже (заголовок чертежа, его автора, дату создания, подписи над и под чертежом) (*рис. 87*).

[2] Подробную информацию о пакетах расширения PSTricks и PGF/TikZ можно получить на сайтах разработчиков этих пакетов: http://tug.org/PSTricks/main.cgi и http://sourceforge.net/projects/pgf/

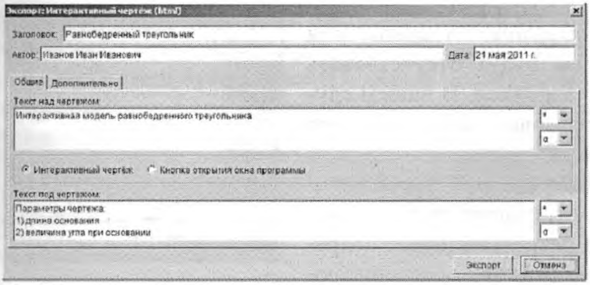


Рис. 87

Если на закладке *Общие* выбрана опция *Интерактивный чертеж*, то в диалоговом окне экспорта будет доступна закладка *Дополнительно*. На этой закладке можно указать, какие виды действий будут доступны при выполнении Java-апплета (блок настроек *Функциональность*). Кроме того, на закладке *Дополнительно* можно задать необходимость использования в Java-апплете элементов интерфейса самой программы GeoGebra (блок настроек *Пользовательский интерфейс*). Вид закладки *Дополнительно* представлен на *рисунке 88*.

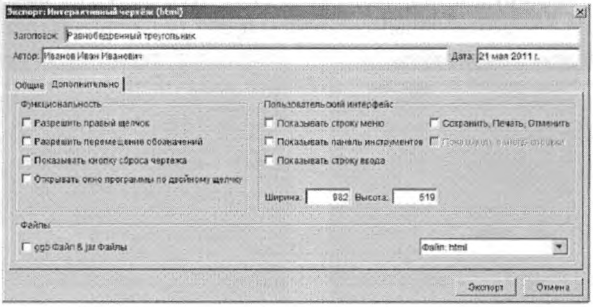


Рис. 88

В нижней части закладки *Дополнительно* расположен блок настроек *Файлы*. Чтобы после экспорта можно было автономно использовать Java-апплет, необходимо экспортировать сам файл модели с расширением *.ggb и файлы с расширением *.jar, которые содержат весь программный код и обеспечивают выполнение Java-апплета. Поэтому перед выполнением экспорта необходимо установить «флажок» *ggb Файл & jar Файлы*. В правой части блока настроек Файлы следует из выпадающего списка выбрать значение *Файл: html*. Это позволит в процессе экспорта создать файл с расширением *.html, который в последующем можно будет открыть с помощью Web-браузера (*рис. 89*).

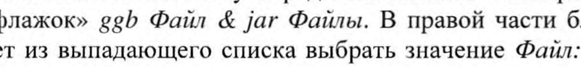


Рис. 89

После нажатия кнопки *Экспорт* будет предложено в стандартном диалоге сохранения указать имя файла с расширением *.html. Для корректной работы Java-апплета необходимо указать имя файла, в котором будут отсутствовать буквы русского алфавита. В нашем случае можно использовать, например, имя triangle.html (*рис. 90*).

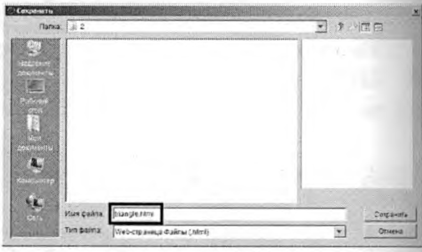
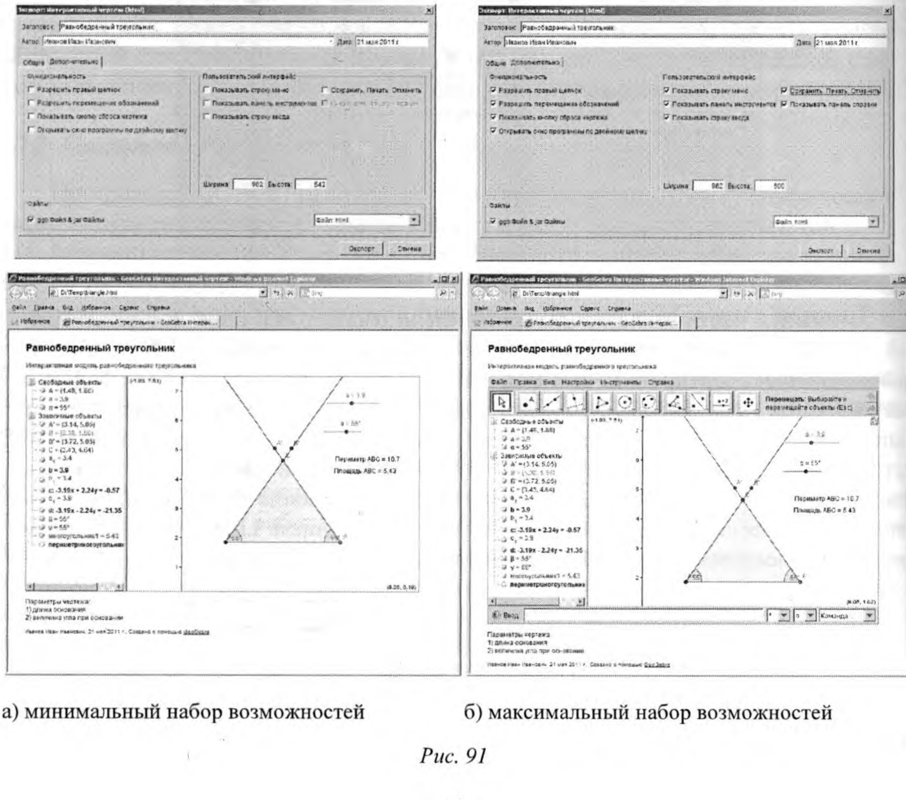


Рис. 90

В диалоге сохранения файлов желательно указать отдельную пустую папку, в которую в результате будет сохранен весь набор файлов, обеспечивающих запуск и работу Java-апплета. В нашем случае в эту папку будут сохранены следующие файлы: *triangle.html, triangle.ggb, geogebra.jar, geogebra_cas.jar, geogebra_export.jar, geogebra_gui.jar, geogebra_main.jar, geogebra_properties.jar*.

Сразу после выполнения экспорта информации будет автоматически запущен Web-браузер, используемый по умолчанию в операционной системе. В окне Web-браузера будет отображаться результат работы Java-апплета, полученного в результате экспорта. В зависимости от настроек, указанных на закладке *Дополнительно* диалога экспорта, отображаемый в окне Web-браузера вид и набор возможных действий с интерактивным чертежом будут различными (*рис. 91*).



а) минимальный набор возможностей

б) максимальный набор возможностей

Рис. 91

На закладке *Дополнительно* в блоке настроек *Файлы* в выпадающем списке справа можно, помимо сохранения в файл с расширением *.html, выбрать различные варианты экспорта в буфер обмена с целью последующей вставки экспортированной информации в специализированные приложения (*рис. 92*).

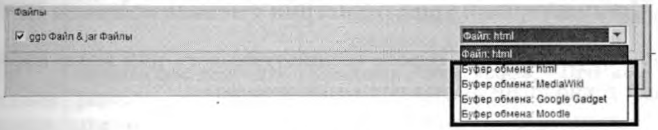


Рис. 92

Программа GeoGebra поддерживает экспорт информации в буфер обмена в следующих форматах:

html – формат языка разметки гипертекста (HyperText Markup Language);

MediaWiki – формат гипертекстовой среды «вики» (wiki), используемой в качестве основного механизма Википедии;

Google Gadget – формат мини-программ - инструментов, которые возможно размещать на Web-сайтах;

Moodle – формат модульной объектно-ориентированной динамической учебной среды (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment), предназначенной для организации дистанционных курсов и поддержки обучения.

Глава 2. Организация обучения геометрии с компьютерной поддержкой

2.1. Компьютерный урок геометрии с использованием ИГС

Урок, при проведении которого используются те или иные элементы информационной технологии, называют *компьютерным*.

Компьютерные уроки позволяют разнообразить традиционные формы обучения, усилить развивающий эффект. Эффективность таких уроков полностью зависит от целенаправленного и взвешенного использования тех возможностей, которые предоставляются компьютерной техникой и новыми информационными технологиями.

Подготовка и проведение компьютерного урока является новой и непривычной для учителя математики задачей, которая связана в первую очередь с решением вопроса об оптимальном распределении учебного времени отводимого на работу с компьютером и без него, а также вопроса о сочетании индивидуальной формы работы ученика на компьютере с коллективным обсуждением результатов этой работы.

В помощь учителям для подготовки компьютерных уроков геометрии с использованием УМК «Наглядная планиметрия» авторским коллективом С.Н. Котова, Р.П. Овчинникова, А.Е. Томилова, М.В. Шабанова и др. были разработаны примерные поурочные планирования и контрольные работы [15].

В поурочном планировании определены:

- распределение уроков на компьютерные и традиционные;
- распределение компьютерных заданий (анимации, динамические модели, упражнения, задачи) УМК «Наглядная планиметрия» по урокам;
- дополнительные задачи (на построение, многовариантные, с параметром и др.) для решения их в ИГС;
- задачи из учебника геометрии [3], подлежащие переформулированию или построению динамической модели для решения их в ИГС;
- организация деятельности учащихся на компьютерных уроках.

При использовании представленных в пособии рекомендаций следует обратить внимание на то, что выбор той или иной формы работы с ИГС должен осуществляться с учетом двух основных факторов:

- обеспеченностью компьютерной техникой;
- особенностью изучаемого средствами ИГС содержания.

Общие представления об особенностях выбора форм использования ИГС с учетом названных факторов можно получить из *таблицы 2*. Наиболее предпочтительные формы организации работы с ИГС выделены полужирным шрифтом.

Таблица 2

Формы работы с ИГС

Изучаемое с ИГС содержание	Класс с мультимедийным оборудованием	Компьютерный класс	
		Частичное обеспечение ПК учащихся класса	Полное обеспечение ПК учащихся класса
Знакомство с геометрическими моделями реальных объектов	Фронтально демонстрировать процесс построения модели учителем или просмотр ролика (дем.)	Просмотр в паре ролика, демонстрирующего процесс построение модели (дем.) Выполнение по очереди заданий на построение модели (диаг.)	Просмотр ролика, демонстрирующего процесс построение модели индивидуально (дем.) **Самостоятельное выполнение заданий на построение модели** (инд.).
Предъявление изображений геометрических объектов	**Постановка задачи готовым динамическим чертежом (дем.)** Фронтально демонстрировать процесс построения динамического чертежа к условию задачи, теоремы (дем).	Просмотр задачи поставленной готовым динамическим чертежом в паре (дем.) **Выполнение по очереди задания на построения динамического и статического чертежа по условию задачи** (диаг.)	Просмотр задачи поставленной готовым динамическим чертежом индивидуально (дем.) Выполнение задания на построения динамического чертежа по условию задачи (инд.)
Ознакомление с правилами построения объектов в ИГС	**Фронтально демонстрировать процесс построения объектов учителем** или просмотр ролика (дем.)	Просмотр ролика в паре (дем.) Выполнение по очереди задания на воспроизведение правил построения (диаг.)	Просмотр ролика индивидуально (дем.) Выполнение задания на воспроизведение правил построения (инд.)
Решение задач, допускающих аналитический/ логический и компьютерный способ	Вызов ученика для компьютерного решения и его демонстрации с последующим сопоставлением результатов с результатами класса (инд.)	**Решение задачи в паре «практик – теоретик» с последующим обсуждением результатов** (пар.) Решение задачи по очереди на компьютере и без него (диаг.)	Решение задачи на компьютере и без него (инд.)
Ознакомление с геометрическим фактом	Просмотр эксперимента на проверку динамической устойчивости, демонстрируемого учителем (дем.) Просмотр ролика проведения эксперимента (дем.)	Просмотр ролика проведения эксперимента в паре (дем.) Работа в паре «наблюдатель – экспериментатор» с готовым динамическим чертежом (пар.)	**Проведение эксперимента с готовым динамическим чертежом** (инд.)

Основными формами работы с ИГС, представленными в таблице, являются следующие:

- *фронтальная работа* с использованием ИГС в качестве средства демонстрационной наглядности (дем.*).*
- *одновременная индивидуальная работа учащихся* за компьютерами при условии равенства числа учащихся и компьютеров в классе (инд.);
- *парная работа* с ИГС при частичном разделении заданий в паре, если количество учащихся не более чем в два раза превышает количество компьютеров (пар.);
- *диагональная (посменная) работа* с ИГС в 2-3 смены учащихся при условии, что их в 2-3 раза больше, чем компьютеров (диаг.).

Особое внимание заслуживают парная и диагональная формы организации работы с ИГС. Построить работу в парах за компьютером можно при комбинировании работы за клавиатурой и в рабочей тетради. Нужно учитывать, что с программой в один момент времени может работать только один учащийся. Работа в паре не должна приводить к тому, что один учащийся подавляет инициативу другого.

Если класс, с которым проводится урок в компьютерном классе, неоднороден по математической и технологической подготовке, да ещё количество учащихся превышает количество компьютеров в кабинете, нужно выбрать диагональную схему урока.

Если класс разбить на 3 группы, то для каждой группы следует подготовить чёткое небольшое модульное задание, рассчитанное на 10-12 минут самостоятельной работы с компьютером. Чтобы обеспечить в такой ситуации равномерную загруженность учащихся, избежать суеты и неразберихи, работа каждой группы строится по схемам, представленным в *таблице 3.* А до урока, каждый из учащихся узнает номер своего компьютера (компьютеры в классе должны быть пронумерованы). Один и тот же номер сообщается трём ученикам, принадлежащим к трем различным подгруппам.

Таблица 3

Распределение работы учащихся различных групп на уроке в компьютерном классе по диагональной схеме

Этапы урока	1 группа	2 группа	3 группа
Этап 1 (2 минуты)	Постановка цели урока		
Этап 2 (10-12 минут)	Работа за компьютером	Работа с учебником	Работа с учителем
Этап 3 (10-12 минут)	Работа с учебником	Работа с компьютером	Работа с учебником и тетрадью
Этап 4 (10-18 минут)	Решение задач	Решение задач	Работа с компьютером
Этап 5 (4-5 минут)	Подведение итогов урока, домашнее задание		

Замечание. 2 и 5 этап начинается для всех одновременно, а вот смена 2-4 этапов для каждого учащегося индивидуальна. Учащиеся второй и третьей подгрупп знают очередность своей работы за компьютером с данным номером. Как только учащийся первой подгруппы освободил компьютер, за него сразу садится учащийся второй подгруппы, а потом — третьей. Сильные учащиеся освобождают рабочее место, как правило, быстро. Учителю придётся проследить за тем, чтобы учащиеся второй группы не занимали компьютер свыше отведённого им времени.

Компьютерные уроки, проводимые в классе с мультимедийным оборудованием (компьютером, видеопроектором, экраном, по возможности, интерактивной доской или переносным (портативным) вариантом этой техникой) называют *мультимедийными уроками*.

На таких уроках компьютер используется в демонстрационном режиме в комплексе с проекционной аппаратурой (проектор + экран или интерактивная доска) учителем или учениками.

На таком уроке учитель остается одним из главных участников образовательного процесса, часто и главным источником информации, а мультимедийные технологии применяются им для усиления наглядности, для подключения одновременно нескольких каналов представления информации, для более доступного объяснения учебного материала.

Принцип наглядности обучения при использовании интерактивной геометрической среды приобретает новое качество:

- существенно повышается качество визуальной информации, она становится ярче, красочнее, динамичнее,
- есть возможность увеличивать размер изобразительной наглядности для более детального рассмотрения без потери её качества;
- построения можно проводить «в реальном масштабе времени»;
- появляется возможность создания «наглядной абстракции», то есть разнообразных моделей и условно-графических интерпретаций свойств, соотношений, соответствий.

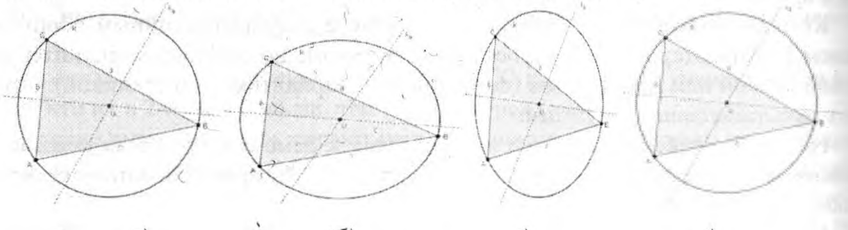
ИГС позволяет учителю подготовить и использовать на мультимедийных уроках следующие виды наглядности:

- *чертежи-иллюстрации,* элементы такого чертежа легко видоизменить, чтобы добиться нужных соотношений; для отдельных элементов чертежа можно использовать разные стили, оформление и цвет;
- *анимации и интерактивные модели, видеоролики* для введения понятий, демонстраций объёма понятия, доказательства теорем, демонстрации алгоритмов построений и вычислений. Анимации позволяют представить в динамике процесс движения отдельных элементов иллюстрации, «порционной» подачи текстовой информации (эффект «электронного лектора»), интерактивные модели — возможность управления различными элементами чертежа.

На сайтах, аннотированных в *Приложении 1* настоящего пособия, можно найти большое количество динамических моделей для изучения геометрии, созданных учителями и учащимися разных стран, файлы которых можно скачать или использовать для демонстрации по сети Java-апплеты.

Использование наглядности на мультимедийном уроке будет эффективным при соблюдении определенных требований:

- *Иллюстрации, чертежи должны быть узнаваемы*. Речь идёт о неумелом использовании иллюстраций, к которым применялись операции увеличения, приводящие к искажениям, потере контрастности, размытости, то есть неузнаваемости изображения. На *рисунке 93* приведен пример обычного (*а*), искаженного (*б*, *в*), размытого от излишнего увеличения (*г*) чертежа.



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 93

- *Время демонстрации анимации, видеоролика должно быть оптимальным*. Учащийся должен понять и запомнить последовательность выполняемых действий в видеоролике, успеть прокомментировать показанное, заметить нужную закономерность, изменение или инвариантность. Однако при этом не следует забывать о сохранении *темпа* урока. Видеофрагмент должен быть предельно кратким по времени, причем учителю необходимо позаботиться об обеспечении *обратной связи* с учащимися. То есть видеоинформация должна сопровождаться рядом вопросов развивающего характера, вызывающих ребят на диалог, комментирование происходящего. Целесообразно использовать короткие видеоролики (1–2 минуты), так как в когнитивном плане просмотр учебного видеоролика является пассивным восприятием знаний, а не активной формой учебной деятельности (комментировать ролик может только один учащийся или учитель). На *рисунке 94* представлены кадры видеоролика «Площадь трапеции» УМК «Наглядная геометрия [17].

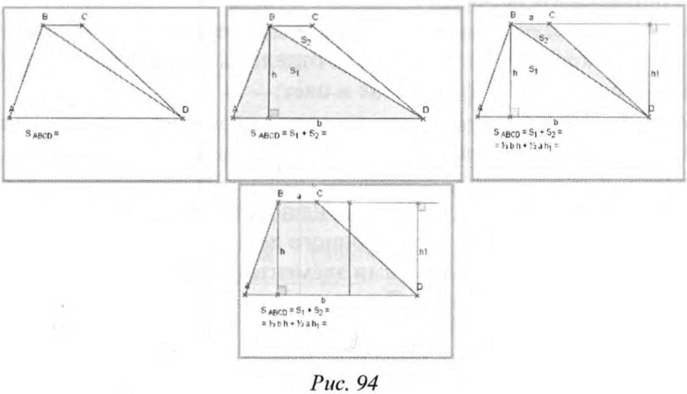


Рис. 94

• *Эффекты анимации должны быть дидактически оправданы,* не отвлекать ученика, а привлекать его внимание. Излишняя динамика может превратить объект изучения в раздражающий фактор. На входе целесообразно использовать простые эффекты анимации «появление», «растворение», «выцветание». При необходимости обратить внимание учеников на какой-то объект, уместны эффекты выделения «мигание», «мерцание», «изменение цвета» и т.п. Стрелки, графики, буквы не должны «выпрыгивать», «выскакивать», «вращаться». Излишняя динамика может превратить объект изучения в раздражающий фактор. Следует обращать внимание и на последовательность появления текстов, иллюстраций. Естественное направление движения взгляда — слева направо → и сверху вниз ↓. Всё, что способствует этому движению, приносит удовлетворение, всё, что мешает, напротив, раздражает и вызывает отрицательные эмоции.

• *Последовательность видеоряда должна быть продуманной*, носить наибольший обучающий эффект, обеспечивать не простую репродукцию знаний, а закладывать развивающее начало в урок, побуждать учащихся к активной мыслительной деятельности. Варианты подачи изображений на экран:

– показ наглядного объекта → создание проблемной ситуации → появление объекта на экране после определённой дискуссии;
– последовательное появление объекта и его элементов сопровождается последовательным появлением текста;
– наглядный объект при постановке вопросов играет роль подсказки.

• *Чертежи, иллюстрации должны иметь оптимальный размер*. Следует убедиться, что элементы чертежа, иллюстрации различимы с любого расстояния в классе. Если какие-либо детали чертежа, изображения очень мелкие, можно воспользоваться увеличением или технологическим приёмом «Лупа» (при наличии в классе интерактивной доски). Это требование касается и максимальных размеров, которые могут негативно способствовать более быстрой утомляемости учеников. Следует помнить, что оптимальный размер изображения на экране монитора не всегда соответствует оптимальному размеру изображения большого экрана проектора.

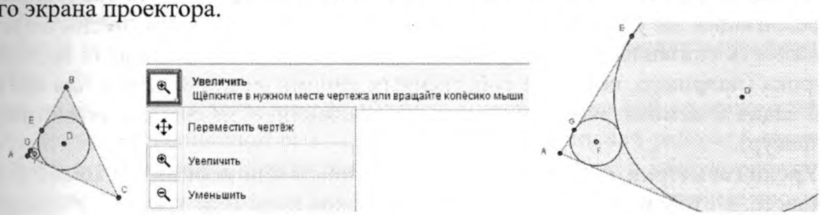


Рис. 95

• *Количество предъявляемых изображений на экране должно быть оптимально.* Не следует увлекаться большим количеством слайдов, иллюстраций, чертежей, которые отвлекают учеников, не дают сосредоточиться на главном. Излишняя наглядность мешает запоминанию.

• *Изучаемый объект должен быть правильно расположен.* Изучаемый объект должен занимать место по центру или чуть выше центра. Любой символ, любая сопутствующая наглядность должна гармонично сочетаться с главным объектом изучения.

- *Текст должен быть оформлен правильно и единообразно:*

– основной текст пишется рублеными шрифтами без засечек типа Arial, Verdana, Tahoma, прямого начертания, декоративные шрифты не используются;

– минимальные размеры букв должны обеспечивать чтение текста без напряжения;

– для более комфортного чтения рекомендуется оставлять свободное место от колонки текста с обеих сторон. Слишком большая длина строк затрудняет работу глаза и снижает темп чтения;

– для выделения дополнительных коротких текстовых элементов применять полужирный шрифт или курсив, отдельных слов заглавные буквы;

– заголовки должны быть краткими, соответствовать содержанию экрана, располагаться по центру или с выравниванием по левому краю и отличаться от основного текста.

- *Цветовая гамма должна быть выбрана с учётом рекомендаций психологов, дизайнеров* о влиянии цвета на познавательную деятельность учащихся, о сочетании цветов, оптимальном количестве цветов на экране. Для выделения структурных элементов и важных фрагментов текста целесообразно использовать дополнительные цвета — темно-красный и зеленый, тонкие рамки ярких интенсивных цветов и фоновые плашки неярких, но заметных на основном фоне цветов. Следует обратить внимание и на то, что цветовое восприятие на экране монитора и на большом экране значительно отличаются (на экране интенсивность цвета уменьшается), и мультимедийный урок необходимо готовить в первую очередь с расчетом на большой экран.

До сих пор говорилось о применении компьютера на мультимедийном уроке с позиции возможностей учителя. Нельзя забывать о том, что учащийся — это тоже творческая личность и ему необходимо предоставлять возможность самореализации на уроке. С этой целью учащимся может быть предоставлена возможность оказания помощи учителю в подготовке компьютерных материалов урока (например, создание собственных динамических моделей для постановки задач и демонстрации динамической устойчивости свойств геометрических фигур).

Уроки геометрии, проводимые в стационарном или мобильном компьютерном классе, в отличие от мультимедийных уроков называют *уроками с компьютерной поддержкой.*

Возможности компьютерного класса *используются* для организации самостоятельной работы учащихся с УМК «Наглядная планиметрия», контроля знаний учащихся, проведения уроков с использованием Интернет-источников и интегрированных уроков геометрии с информатикой.

Особенностью урока с компьютерной поддержкой является то, что кроме обычных целей урока, урок с компьютерной поддержкой имеет *технологиче-*

скую цель: обучение новому методу учебной деятельности, использованию конкретной учебной программы.

На таких уроках кроме видов наглядности, применяемых на мультимедийных занятиях, с помощью ИГС можно подготовить и использовать:

• *динамические исследовательские модели* для проведения геометрических открытий, численных экспериментов, исследования заданных математических ситуаций (пограничных и крайних ситуаций, геометрических мест точек и др.);

• *динамические модели условий задач*

– с использованием динамического моделирования реальных объектов;
– на построение циркулем и линейкой с возможностью экспериментального исследования границ существования решений;
– с ограниченным набором инструментов и доступам к объектам;

• *сценарные динамические модели изучения понятий, теорем, решения задач* с использованием динамического текста для организации

– пошаговых рассуждений,
– визуальных подсказок, указаний;

• *тестовые задания.*

Методические рекомендации по проведению уроков с компьютерной поддержкой:

• необходимо разработать подробный план урока, сформулировать вопросы и задания к компьютерным демонстрациям, моделям, продумать конкурсы на лучшую модель, чертеж к задаче;

• первоначально использовать программу (интерактивную геометрическую среду) в демонстрационном, фронтальном варианте;

• урок лучше начинать с фрагмента длительностью не более 10–15 минут, на котором нужно ознакомить учащихся со структурой урока и последовательностью выполнения заданий, раздать учащимся заранее распечатанные вопросы и задания к моделям на готовых бланках, в которые должны вноситься ответы и результаты работы;

• основную часть урока необходимо отводить на самостоятельную работу учащихся за компьютером. Ученики могут работать в индивидуальном режиме, в парах или по очереди;

• желательным является оформление в конце урока небольшого отчёта с осмыслением выполненной работы, а при оценке групповой работы – проведение опроса с указанием вклада каждого из членов группы в общую работу для определения коэффициента индивидуального участия. Компьютерные уроки без подведения итогов менее эффективны;

• на уроках можно выделять учащимся некоторое время на незапланированные виды работы: пусть они познакомятся даже с не относящимися к теме урока моделями, с неизученными инструментами ИГС, так как на первых порах им всё интересно, иначе они будут делать это украдкой. Пусть ребята подробнее познакомятся со средой, освоят интерфейс программы и уверенность работы с ней. Это сэкономит время на последующих уроках;

• в конце урока учащимся быстрее всех справившимся с основными заданиями можно предложить *творческие задания* на самостоятельное придумывание задачи, проведение компьютерных экспериментов для выдвижения гипотезы с последующим ее обоснованием.

• при проведении урока в компьютерном классе недопустима фронтальная работа с учащимися, сидящими за компьютером, на протяжении всего урока, также не следует пытаться синхронизовать работу детей, постоянно прерывать их работу и сообщать, какие действия им следует предпринимать далее. При правильно подготовленном уроке каждый ученик (группа) выполняет своё персональное задание в своём, индивидуальном темпе;

• при работе с компьютером умения, полученные учащимися в геометрических построениях с помощью ИГС необходимо закрепить реальными построениями, иначе настоящие навыки не разовьются;

• злоупотреблять компьютерной поддержкой, равно как и любым другим одним методом работы, нельзя: так как работа в компьютерном классе с программой, в том числе и интерактивной геометрической средой, несёт некоторую условность, учитель должен убедиться в том, что материал понят правильно, и что учащиеся воспринимают изученное отдельно от компьютера. Это может быть проверено на последующих уроках этой темы без использования компьютера. Слишком частое проведение уроков с использованием компьютеров может отрицательно сказаться на результатах обучения: в сознании ребенка геометрический объект или теорема могут прочно ассоциироваться с кнопками и готовыми чертежами. Большее разнообразие учебных ситуаций и гибкое оперирование образами достигается на традиционных уроках с помощью карандаша и линейки, самостоятельными построениями и переосмыслением изученного. Наиболее оптимальным является соотношение: 1 час в неделю в компьютерном классе и 1 час на традиционное обучение. При таком соотношении обеспечивается интеграция наглядно-эмпирического и дедуктивного способа освоения геометрии;

• в отличие от привычных уроков, на которых ритм работы учеников задаётся и строго контролируется учителем, в компьютерном классе работа учащихся осуществляется за каждой машиной в своём темпе. Поэтому общая последовательность работы должна быть хорошо известна учащимся до урока. После того, как ученики окажутся перед экранами компьютеров, общаться с ними будет возможно только индивидуально;

• на первых уроках желательно присутствие, хотя бы в течение первых 10–15 минут, учителя информатики, инженера-программиста или коллеги, знакомого со спецификой компьютерного класса. Практика показывает, что в классе могут возникать неполадки, даже если накануне вы всё проверили и убедились в полной исправности оборудования и работоспособности программного обеспечения.

При построении урока необходимо учитывать:

• *уровень подготовки класса*;

• насколько учащиеся владеют общими *навыками работы с компьютером* и начальными — с *программой;*

- *численность учебной группы* (класса) и *численность компьютеров* в учебном кабинете;
- *допустимую продолжительность работы учащихся* за компьютерами.

Урок с компьютерной поддержкой имеет следующие *преимущества* перед традиционным уроком:

- сокращается время при выработке технических навыков учащихся;
- увеличивается количество тренировочных заданий;
- достигается оптимальный темп работы ученика;
- легко достигается уровневая дифференциация обучения;
- учащийся становится субъектом обучения, так как программа требует от него активного управления;
- в учебную деятельность входит компьютерное моделирование;
- обучение можно обеспечить материалами из удаленных баз данных, пользуясь средствами телекоммуникаций;
- диалог с программой приобретает характер учебной игры, и у большинства детей повышается мотивация учебной деятельности;
- для интеллектуально одарённых детей работа с компьютерными программами является более значащей, чем при традиционной форме обучения в виду их коммуникативной замкнутости.

2.2. Особенности дидактической структуры компьютерных уроков

Основными дидактическими частями компьютерного урока являются: организационная часть; актуализация зон актуального и ближайшего развития; изучение нового материала; закрепление материала — повторение и применение; контроль усвоения; коррекция; обобщение; домашнее задание. Все дидактические части урока могут быть компьютеризированы полностью или частично.

Перед компьютерным уроком учащиеся, дежурные по классу, помогают учителю подготовить компьютерный класс к уроку: включают компьютеры, загружают необходимые программы, подключают проектор, устанавливают экран.

Организационная часть. На данном этапе для эффективности урока необходимо:

- ознакомить учащихся со структурой компьютерного урока и последовательностью выполнения заданий;
- раздать учащимся вопросы и задания к компьютерным заданиям;
- разбить учащихся на группы для работы за компьютером.

Актуализация зон актуального и ближайшего развития чаще проходит в виде беседы с учащимися. Вопросы к ней целесообразно визуализировать на слайдах в виде небольшого видеоряда с использованием чертежей-иллюстраций, анимаций, видеороликов, интерактивных моделей, которые могут быть взяты из предыдущих уроков.

Изучение нового материала. Учитель не отменяется, он координирует и организовывает учебный процесс. А объяснять материал вместо него может компьютер. Привычную чёрную доску заменяет проекционный экран или экран монитора. Богатство содержательной поддержки с помощью видеоряда, звука и текста делает урок не только значительно более усваиваемым, но и неизмеримо более увлекательным. Взаимодействие осуществляется одновременно по всем каналам восприятия «текст — звук — видео — цвет».

Первоначальное ознакомление с новым материалом может происходить как фронтально, так и индивидуально. Индивидуальное общение с компьютером имеет то преимущество, что оно интерактивно (диалог, лекция-беседа, тренинг, тест, проблематизация, гипертекст, гипермедиа).

На большом экране можно:

- показать образец решения или оформления задачи,
- продемонстрировать этапы доказательства теоремы,
- провести взаимопроверку самостоятельной работы с помощью ответов на слайде;
- продемонстрировать портреты математиков и рассказ об их открытиях;
- проиллюстрировать практическое применение теорем;
- при длительном объяснении, особенно в классе с ослабленным вниманием, для релаксации включить видеофрагмент (не более 1 минуты), сопровождающийся музыкой. Он может и не нести очень важной информации, но должен быть связан с темой урока;
- провести физкультминутку.

Не целесообразно проецировать на большой экран определение понятия, формулировку теоремы в виде текста, условие задачи из учебника, вопросы теста.

Закрепление. Основной недостаток классического традиционного урока — трудность учёта индивидуальных особенностей усвоения материала учащимися (гендерные различия, индивидуализация трудности материала, темпа усвоения, типологических особенностей личности ребёнка). Применение компьютера позволяет:

- применить индивидуальное программирование, разветвлённую программу закрепления;
- организовать внутри классную групповую дифференциацию;
- разработать задания для учащихся с учётом их индивидуальных особенностей (уровня подготовленности, доминирующего канала восприятия, типа мышления и т.д.).

При этом структура урока становится нелинейной. Каждая группа работает по своему варианту и своей программе.

Компьютер с дистанционной системой опроса позволяет провести экспресс-диагностику усвоения и в зависимости от её результатов соответствующую коррекцию.

Повторение. В компьютерном варианте повторение может быть представлено в разных форматах: текст, звук, изображение. Это может быть репродуктивное тестирование, экспериментальные задачи, проблемные ситуации, развивающие игры и т.д. Таким образом, все учащиеся оказываются включены в мыслительную деятельность, готовы к восприятию нового. Они могут самостоятельно ставить цели, искать решения поставленной задачи, творчески работать, выводить формулы.

При обобщающем повторении для обобщения и систематизации знаний используются графические возможности компьютера, а для достижения гарантированных результатов обучения — программы-тренажёры.

На этапе повторения целесообразно

• использовать ранее подготовленные фрагменты слайдов презентации, перегруппировав их с целью проведения сравнения или анализа и представить учащимся;

• показать видеофрагменты применения тех или иных изученных объектов в быту или природе. Это очень оживляет урок и актуализирует знания школьников;

• подготовить схемы, таблицы, диаграммы;

• включить небольшие отчёты учащихся о домашнем эксперименте, защиту минипроекта по пройденной теме с использованием слайдов презентации.

Не допустимо использование презентации только на таких уроках с целью успеть повторить все.

Презентация, используемая на уроке обобщения должна отличаться стройной логикой, т.к. данная электронная презентация является единым целым и включается во весь урок.

Контроль знаний. Компьютерный контроль знаний по сравнению с традиционным имеет существенные преимущества: учитывается разная скорость работы учащихся, задания дифференцируются по степени трудности; повышается объективность оценки; ученик видит детальную картину собственных недоработок; оценка может выдаваться (причём быстро) не только по окончании работы, но и после каждого вопроса.

Компьютер помогает педагогу в управлении учебным процессом, выдаёт результаты выполнения учащимися контрольных заданий с учётом допущенных в теме ошибок и затраченного времени; сравнивает показатели различных учащихся по решению одних и тех же задач.

Компьютерный контроль знаний по сравнению с традиционным имеет существенные преимущества: учитывается разная скорость работы ученика, задания дифференцируется по степени трудности; повышается объективность оценки; ученик видит детальную собственных недоработок; оценка может выдаваться (причем быстро) не только по окончании работы, но и после каждого вопроса.

Домашнее задание. Электронным домашним заданием, выполненным на компьютере могут быть:

- индивидуальные задания на внешнем носителе,
- чертежи, созданные в ИГС,
- реферат или рецензия на реферат, размещённый в сети Интернет,
- электронная презентация,
- результаты выполненного теста из Интернета, электронного диска и т.п.

Электронное домашнее задание может быть индивидуальным, групповым, ориентировано на разные группы учащихся. При этом необходимо указывать:

- обязательный минимум выполнения и выделять пространство для инициативных;
- временные рамки выполнения работы,
- количество источников информации,
- программу реализации задания,
- объём отчетного документа (количество страниц, слайдов, динамических чертежей),
- дополнительное задание,
- место размещения выполненной работы.

2.3. Санитарно-гигиенические требования к организации работы в компьютерном классе

Гигиенические требования к помещениям для работы с ПЭВМ, их выполнение необходимо для сохранения здоровья учащихся описаны в разделе 3 СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03.

Учебное помещение с ПЭВМ для детей и подростков не должно располагаться в цокольных и подвальных помещениях, иметь естественное и искусственное освещение.

Площадь на одно рабочее место пользователей ПЭВМ с ВДТ на базе электроннолучевой трубки (ЭЛТ) должна составлять не менее 6 $м^2$, с ВДТ на базе плоских дискретных экранов (жидкокристаллические, плазменные) – 4,5 $м^2$.

Рабочие столы следует размещать таким образом, чтобы ПЭВМ были ориентированы боковой стороной к световым проемам, чтобы естественный свет падал преимущественно слева. Искусственное освещение в помещениях должно осуществляться системой равномерного освещения. Оконные проемы должны быть оборудованы регулируемыми устройствами типа жалюзи, занавесей, внешних козырьков и др.

В качестве источников света при искусственном освещении в помещениях с ПЭВМ следует применять преимущественно люминесцентные лампы типа ЛБ и компактные люминесцентные лампы (КЛЛ). Освещение при использовании люминесцентных светильников следует выполнять в виде сплошных или прерывистых линий светильников, расположенных сбоку от рабочих мест, параллельно линии зрения пользователя при рядном расположении ПЭВМ. При расположении ПЭВМ по периметру помещения линии светильников должны располагаться локализовано над рабочим столом ближе к его переднему краю, обращенному к оператору.

В помещениях с ПЭВМ рекомендуется иметь приточно-вытяжную вентиляцию, обеспечивающую оптимальный температурно-влажностный режим для всех климатических зон. При отсутствии приточно-вытяжной вентиляции можно организовать периодическое проветривание или кондиционирование воздуха с помощью бытовых кондиционеров. При отсутствии приточно-вытяжной вентиляции и кондиционеров необходимо организовывать проветривание на каждой перемене и в любую погоду.

Рабочие места учащихся, оснащенные ПЭВМ, и организация их оборудования должны соответствовать гигиеническим требованиям санитарных правил и норм (СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03).

Расстановка рабочих мест учителя и учащихся в кабинете должна обеспечить электробезопасность и безопасность от электромагнитных излучений, свободный доступ учащихся и педагога во время урока к каждому рабочему месту.

В прямоугольном помещении класса рабочие места учащихся располагаются вдоль продольных стен (у окна и напротив). Расстояние между стеной, противоположной оконным проемам, и столами должно быть в пределах 5-10 м, а между стеной с оконными проемами и столами – не менее 20 см. Столы устанавливаются под прямым углом к поверхности стен таким образом, чтобы расстояние между боковыми поверхностями видеомониторов было не менее 1,2 м.

В квадратном помещении класса рабочие места учащихся располагаются по периметру, при этом расстояние между двумя соседними столами, расположенными в углах должно быть не менее 2 м. Такое расположение рабочих мест учащихся с ПЭВМ приводит к наименьшему влиянию вредных факторов, обусловленных работой видеомониторов на электроннолучевых трубах, так как на учащихся будут в основном действовать факторы только видеомонитора, за которым он работает.

Для кабинета не рекомендуется рядная расстановка, так как расстояние между столами с ПЭВМ должно быть не менее 2,0 м, что трудно обеспечить в реальных условиях. Дополнительно кабинет оборудуется двухместными ученическими столами без ПЭВМ. Ученические столы располагаются в центре и предназначены для проведения теоретических занятий, индивидуальной, групповой работы, не требующей использования ПЭВМ.

Помещение для занятий оборудуется одноместными столами, предназначенными для работы с ПЭВМ. Конструкция одноместного стола для работы с ПЭВМ должна предусматривать:

- две раздельные поверхности: одна горизонтальная для размещения ПЭВМ с плавной регулировкой по высоте в пределах 520 – 760 мм и вторая – для клавиатуры с плавной регулировкой по высоте и углу наклона от 0 до 15 градусов с надежной фиксацией в оптимальном положении (12 – 15 градусов);

- ширину поверхностей для ВДТ и клавиатуры не менее 750 мм (ширина обеих поверхностей должна быть одинаковой) и глубину не менее 550 мм;

- опору поверхностей для ПЭВМ или ВДТ и для клавиатуры на стояк, в котором должны находиться провода электропитания и кабель локальной сети. Основание стояка следует совмещать с подставкой для ног;

- отсутствие ящиков.

При отсутствии стола с опорой на стояк и регулировкой поверхностей по высоте для работы на ПЭВМ можно временно допустить:

- расположение клавиатуры на ученическом столе, а видеомонитора – на подставке или подвеску его на кронштейне за ученическим столом;

- расположение на двух ученических столах, составленных вместе: на одном – видеомонитор, на другом - клавиатура.

При наличии высокого стола и стула, не соответствующих росту учащихся, следует использовать регулируемую по высоте подставу для ног.

Столы с ПЭВМ должны быть снабжены стульями с подъемно-поворотными и регулируемыми по высоте и углам наклона сиденьями и спинками.

Правильная посадка обеспечивается подбором стола и стула в соответствии с ростом учащегося в обуви.

Правильная посадка должна быть следующей: руки лежат на клавиатуре согнутые в локтях под углом примерно 90 градусов, плечи при этом расслаблены. Подлокотники кресла не подпирают локти и не заставляют поднимать плечи. Расположение рук относительно стола должно быть таким, чтобы больше половины длины предплечий упирались на стол. Оптимальное расстояние глаз учащихся до экрана монитора должно быть 60-70 см, допустимое – не менее 50 см.

Таблица 4

Высота одноместного стола для занятий с ПЭВМ

Рост учащихся в обуви, см	Высота над полом	
	поверхность стола	пространство для ног, не менее
116-130	520	400
131-145	580	520
146-160	640	580
161-175	700	640
выше 175	760	700

Таблица 5

Основные размеры стула для учащихся

Параметры стула	Рост учащихся и студентов в обуви, см				
	116-130	131-145	146-160	161-175	>175
Высота сиденья над полом, мм	300	340	380	420	460
Ширина сиденья, не менее, мм	270	290	320	340	360
Глубина сиденья, мм	290	330	360	380	400
Высота нижнего края спинки над сиденьем, мм	130	150	160	170	190
Высота верхнего края над сиденьем, мм	280	310	330	360	400
Высота линии прогиба спинки, не менее, мм	170	190	200	210	220
Радиус изгиба переднего края сиденья, мм	20-50				
Угол наклона сиденья, гр.	0-4				
Угол наклона спинки, гр.	95-108				
Радиус спинки в плане, не менее, мм	300				

Длительность работы на ПЭВМ во время учебных занятий при соблюдении гигиенических требований к условиям, организации рабочего места и посадке учащихся определяется возрастом учащихся. Продолжительность непрерывного просмотра статических и динамических изображений на экранах отражённого свечения не должна превышать 20 и 25 минут соответственно для 5–7 классов и 25 и 30 минут для 8–11 классов. Количество уроков с применением технических средств обучения в неделю не должно превышать шести.

Рекомендуемый комплекс упражнений физкультурных минуток (Приложение 4 к СанПиН 2.4.2.2821-10).

Учебные занятия, сочетающие в себе психическую, статическую, динамическую нагрузки на отдельные органы и системы и на весь организм в целом, требуют проведения на уроках физкультурных минуток (далее - ФМ) для снятия локального утомления и ФМ общего воздействия.

ФМ для улучшения мозгового кровообращения:

1. Исходное положение (далее - и.п.) - сидя на стуле. 1 - 2 - отвести голову назад и плавно наклонить назад, 3 - 4 - голову наклонить вперед, плечи не поднимать. Повторить 4 - 6 раз. Темп медленный.

2. И.п. - сидя, руки на поясе. 1 - поворот головы направо, 2 - и.п., 3 - поворот головы налево, 4 - и.п. Повторить 6 - 8 раз. Темп медленный.

3. И.п. - стоя или сидя, руки на поясе. 1 - махом левую руку занести через правое плечо, голову повернуть налево. 2 - и.п., 3 - 4 - то же правой рукой. Повторить 4 - 6 раз. Темп медленный.

ФМ для снятия утомления с плечевого пояса и рук:

1. И.п. - стоя или сидя, руки на поясе. 1 - правую руку вперед, левую вверх. 2 - переменить положения рук. Повторить 3 - 4 раза, затем расслабленно опустить вниз и потрясти кистями, голову наклонить вперед. Темп средний.

2. И.п. - стоя или сидя, кисти тыльной стороной на поясе. 1 - 2 - свести локти вперед, голову наклонить вперед, 3 - 4 - локти назад, прогнуться. Повторить 6 - 8 раз, затем руки вниз и потрясти расслабленно. Темп медленный.

3. И.п. - сидя, руки вверх. 1 - сжать кисти в кулак, 2 - разжать кисти. Повторить 6 - 8 раз, затем руки расслабленно опустить вниз и потрясти кистями. Темп средний.

ФМ для снятия утомления с туловища:

1. И.п. - стойка ноги врозь, руки за голову. 1 - резко повернуть таз направо. 2 - резко повернуть таз налево. Во время поворотов плечевой пояс оставить неподвижным. Повторить 6 - 8 раз. Темп средний.

2. И.п. - стойка ноги врозь, руки за голову. 1 - 5 - круговые движения тазом в одну сторону, 4 - 6 - то же в другую сторону, 7 - 8 - руки вниз и расслабленно потрясти кистями. Повторить 4 - 6 раз. Темп средний.

3. И.п. - стойка ноги врозь. 1 - 2 - наклон вперед, правая рука скользит вдоль ноги вниз, левая, сгибаясь, вдоль тела вверх, 3 - 4 - и.п., 5 - 8 - то же в другую сторону. Повторить 6 - 8 раз. Темп средний.

ФМ общего воздействия комплектуются из упражнений для разных групп мышц с учетом их напряжения в процессе деятельности.

Рекомендуемый комплекс упражнений гимнастики глаз (Приложение 5 к СанПиН 2.4.2.2821-10).

1. Быстро поморгать, закрыть глаза и посидеть спокойно, медленно считая до 5. Повторять 4 - 5 раз.

2. Крепко зажмурить глаза (считать до 3, открыть их и посмотреть вдаль (считать до 5). Повторять 4 - 5 раз.

3. Вытянуть правую руку вперед. Следить глазами, не поворачивая головы, за медленными движениями указательного пальца вытянутой руки влево и вправо, вверх и вниз. Повторять 4 - 5 раз.

4. Посмотреть на указательный палец вытянутой руки на счет 1 - 4, потом перенести взор вдаль на счет 1 - 6. Повторять 4 - 5 раз.

5. В среднем темпе проделать 3 - 4 круговых движения глазами в правую сторону, столько же в левую сторону. Расслабив глазные мышцы, посмотреть вдаль на счет 1 - 6. Повторять 1 - 2 раза.

Глава 3. Приемы использования интерактивных геометрических средств в обучении геометрии

3.1. Формирование геометрических понятий на основе динамического моделирования реальных объектов

Положения геометрии, систематизированные Евклидом, исторически складывались в процессе практической деятельности людей. Именно поэтому понятийный аппарат элементарной геометрии представлен в основном научными понятиями, имеющими, так называемую, «*модельную природу*».

К их числу относятся понятия о видах геометрических фигур, об отношениях их равенства и подобия, о видах отношений взаимного расположения фигур на плоскости и в пространстве, о видах геометрических величин, видах геометрических преобразований.

Все они возникли из потребности расширения выразительных возможностей геометрического языка в описании внешних (непосредственно «видимых») свойств объектов и явлений окружающей действительности: их форм, размеров, положения относительно других объектов, видоизменения.

Процесс формирования научных понятий модельной природы впервые был описан философом Джоном Локком (1632-1704) в книге «Опыты о человеческом разуме» (см. *схему 1*).

Схема 1

Джон Локк считал, что процесс формирования понятий начинается с момента отражения органами чувств предметов реальной действительности. Результатом этого отражения являются образы восприятия. Последние обобщаются и превращаются в образы представления. Затем, процесс сравнения приводит к выделению группы сходных представлений. После этого мысленно исключается все несущественное и случайное (изолирующая абстракция), представления совершенствуются воображением (абстракция – идеализация) и удерживается только общее, существенное, что приводит к отождествлению сходных представлений (абстракция отождествления). В результате возникает *понятие*.

Однако впоследствии было установлено, что этот процесс описывает становление только одной характеристики научного понятия – его *объема* (т.е. эмпирического предпонятия научного понятия). *Содержание* научного понятия (система свойств понятия) складывается в процессе осмысления способа «видения» реальности, закрепленного в понятии, той роли, которую вводимое понятие призвано сыграть в системе существующих понятий, в процессе раскрытия его связей и отношений с другими понятиями, в ходе оперирования этим понятием. В связи с этим философы стали говорить о существовании двух ступеней формирования понятий: *чувственной*, состоящей в образовании эмпирического предпонятия, и *логической*, заключающейся в теоретическом осмыслении существенных свойств понятия. Наличие этих двух ступеней формирования научных понятий подтвердили и результаты исследования психологов (Л.М. Веккер, Л.С. Выготский).

Привлечение интерактивной геометрической среды к формированию геометрических понятий в учебном процессе позволяет оптимизировать процесс формирования понятий за счет органического соединения описанных выше ступеней в одну. Для этого необходимо включить учащихся в деятельность построения и оперирования динамической моделью реального объекта, адекватную задачам раскрытия содержания и объема понятия.

Рассмотрим эту возможность на примере формирования понятия «*угол*».

1. **Этап актуализации интуитивной модели**. Систему представлений, которой учащиеся пользуются для обозначения того или иного реального объекта термином «угол», мы назовем *интуитивной моделью способа видения объекта, определенного смыслом термина*. Процесс формирования научного понятия «угол» должен начинаться с включения учащихся в деятельность актуализации этих представлений. С этой целью им может быть предложено задание пояснить с помощью построений на изображении (*рис. 96*) то, как они понимаю предложение «Бросай мяч под углом в 45^0».

Рис. 96

В более сложных для построения ситуациях задание может быть заменено соответствующей анимированной демонстрацией.

В результате этой работы учащийся заменит реальный объект, обозначаемый термином «угол» его моделью – геометрическим объектом, изображенном с помощью инструментов среды:  – точка,  – луч,  – угол. Заметим, что само использование этих инструментов устанавливает генетические связи вводимого понятия с ранее известными.

2. Этап получения динамической модели. Построенный чертеж обладает свойством *динамичности* относительно величины угла (параметр α) и места положения на плоскости задающих его точек. Это позволяет использовать его в качестве инструмента проверки возможности распространения термина «угол» на другие реальные объекты. Включение учащихся в деятельность такой проверки требует подбора целой серии изображений реальных объектов. Среди них должны быть объекты, применение термина «угол» к которым вполне оправдано, при этом их несущественные свойства: расположение на плоскости, величина угла должны варьироваться (*рис. 97 а - г*).

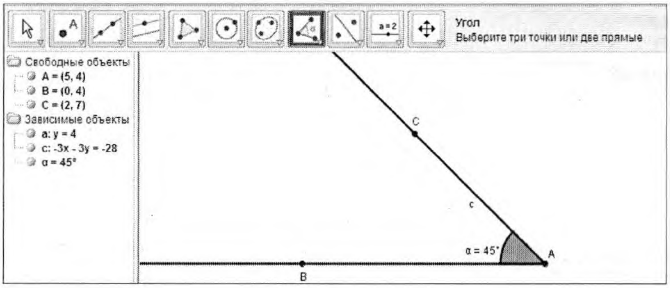


Рис. 97 а

Рис. 97 б

Рис. 97 в

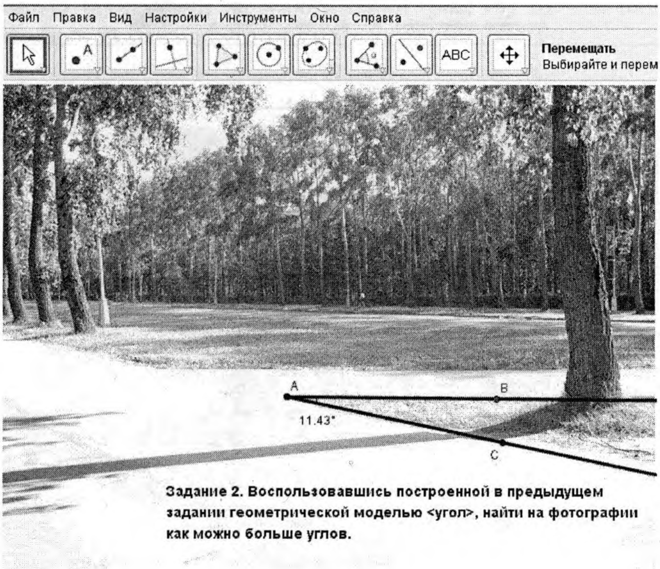


Рис. 97 г

Кроме того, должны быть и объекты, на которые распространение термина не оправдано или требует введения допущений, например, угол, образованный отрезками, а не лучами (*рис. 98*).

Рис. 2а

Рис. 98

Результатом работы на данном этапе является закрепление за термином уже не геометрического объекта или даже их набора, а динамического образа, охватывающего объем формируемого понятия в целом. Назовем этот динамический образ *динамической моделью области распространения термина*. Кроме того, уже на данном этапе учащиеся приобретают знания о содержании понятия:

- знакомятся с допустимой областью значения параметров (например, узнают, что градусная мера угла может изменяться от $0°$ до $180°$);
- уточняют представления о видах углов задаваемых двумя лучами: внутренний (меньший угол) и внешний угол (больший угол);
- выделяют развернутый угол и нулевой угол как особые случай (развернутый угол тот, который обладает следующими свойствами: внешний угол равен внутреннему углу, допускает иной алгоритм построения, вершина угла лежит между точками, задающими его стороны, стороны угла дополняют друг друга до прямой; нулевой – у которого внешний угол равен $360°$, стороны – совпадающие лучи);
- актуализируют представления о классификации углов по их градусной мере: острый, прямой, тупой.

3. Этап получения теоретической модели. Цель этапа – закрепление за термином необходимого и достаточного набора свойств для однозначного решения вопроса о возможности подведения объекта под понятие, расширение знания о его свойствах и возможностях нового понятия. Множество утверждений, получаемых на данном этапе, мы назовем *теоретической моделью области распространения термина*.

Необходимый и достаточный набор свойств дает алгоритм построения динамического чертежа. Он может быть вскрыт в процессе вывода на экран протокола построения изображения геометрического объекта (*рис. 99*).

Протокол

Файл Вид Справка

№	Имя	Определение	Значение
1	Изображен...		рисунок1
2	Точка A		A = (5, 5)
3	Точка B		B = (0, 4)
4	Луч a	Луч через A, B	a: 0x - 5y = -24
5	Точка C		C = (2, 7)
6	Луч c	Луч через A, C	c: -3x - 3y = -27
7	Угол α	Угол по точкам C, A, B	α = 45°

Рис. 99

Протокол может быть использован в качестве речевой опоры для выполнения учащимися задания на формулировку определения понятия, или в качестве основы для осмысления определений, представленных в учебнике. В этом втором случае перед учащимися может быть поставлено задание:

1) преобразовать определение в алгоритм построения «угла» в ИГС;

2) сравнить полученный алгоритм с алгоритмом, представленным в протоколе построений;

3) если они не совпадают, то исследовать, как изменятся свойства чертежа, если убрать из алгоритма шаги, не представленные в определении (или дополнить недостающими шагами).

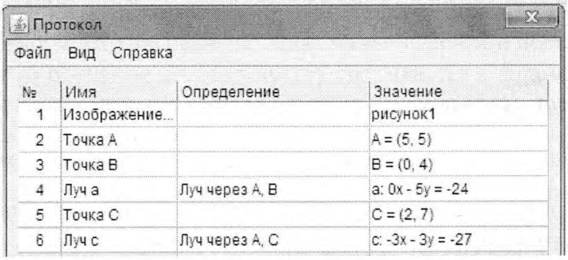
Например, пусть в учебнике дано следующее определение: «угол – это геометрическая фигура, образованная точкой – вершиной угла и двумя лучами, с началом в этой точке». Данное определение задает следующие алгоритм построения угла в ИГС:

1) отметить точку;

2) построить луч с началом в этой точке, проходящий через другую, произвольно выбранную точку;

3) построить другой луч с началом в той же точке, проходящей через третью произвольно выбранную точку.

Этот алгоритм требует убрать последний шаг в протоколе построений (*рис. 99*). Становиться очевидным, что у такого угла нельзя измерить величину, так как он не содержит части плоскости, заключенной между лучами (*рис. 100*).



№	Имя	Определение	Значение
1	Изображение...		рисунок1
2	Точка A		A = (5, 5)
3	Точка B		B = (0, 4)
4	Луч a	Луч через A, B	a: 0x - 5y = -24
5	Точка C		C = (2, 7)
6	Луч c	Луч через A, C	c: -3x - 3y = -27

Рис. 100

Заметим, что работа с протоколом построения позволяет также показать учащимся возможность аналитического задания геометрических объектов, образующих угол (точек по их координатам, лучей уравнениями прямых с указанием координаты точки начала).

Вывод на экран диалогового окна «свойства» (*рис. 101*) позволяет познакомить учащихся с принятым в математике символьным обозначением понятия «угла» (см. строку «имя») и его характеристическими элементами – тремя точками, указанными в определенном порядке (см. строку «определение»).

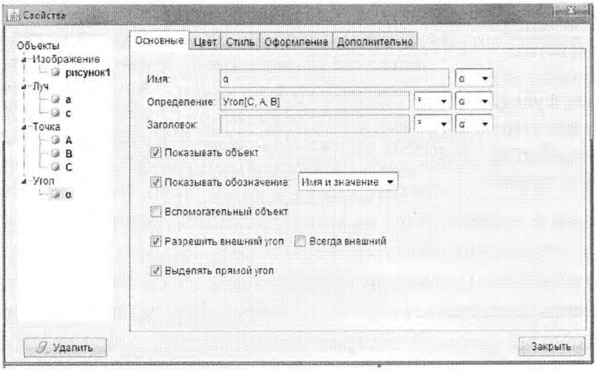


Рис. 101

Постановка перед учащимися задания изменения порядка точек в «определении» покажет им важность соблюдения определенных правил их задания. Постановка заданий на установление и снятие флажков в строках «разрешить внешний угол» и «всегда внешний угол» позволяет обнаружить один из путей расширения понятия угла между лучами (рассмотрение углов с градусными мерами от 0^0 до 360^0 в определенной ориентации).

Дальнейшая работа над расширением знаний учащихся о понятии «угол» в ИГС может быть связана:

- с изучением иных способов задания угла (с использованием инструмента  – угол заданной величины);

• открытием возможности дальнейшего расширения понятия угла за счет увеличения допустимой области определения его градусной меры (инструмент  – перемещать);

• введением других понятий с опорой на понятие угла: «угол наклона прямой по отношению к оси Ох» (инструмент  – наклон прямой), «угол поворота вокруг точки» (инструмент  – поворот вокруг точки на угол).

Таким образом, процесс формирования геометрических понятий модельной природы с использованием ИГС может быть представлен *схемой 2*.

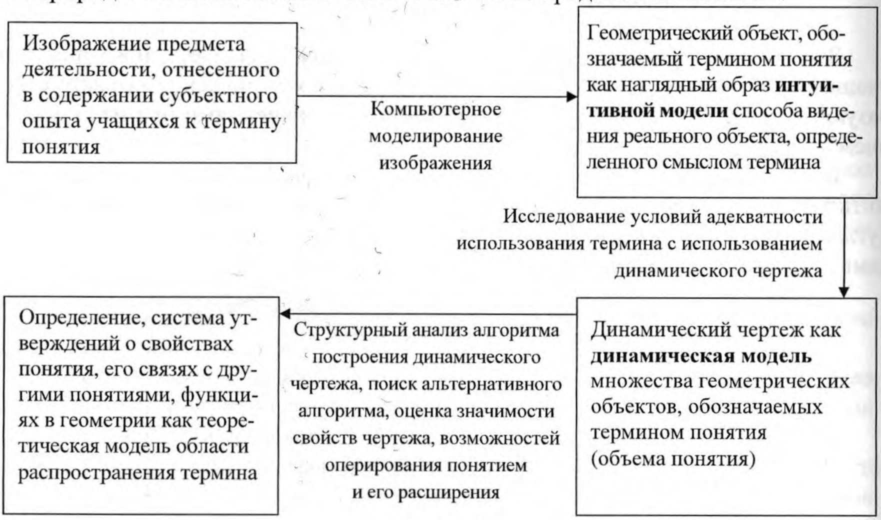


Схема 2

Обращаем внимание, что не все изучаемые в курсе геометрии понятия могут быть сформированы с использование этой схемы, так как среди них есть понятия:

• более высоких уровней абстракции (например, понятие «геометрическая величина» – результат отождествления понятий «длина», «расстояние», «площадь», «объем», «градусная мера»);

• первичные понятия геометрии: точка, прямая, плоскость, пространство, содержание которых не может быть раскрыто в отрыве друг от друга;

• понятия – интерпретации, возникшие в результате переосмысления понятий одной теории в терминах другой (коллинеарность, компланарность и др.).

3.2. Обучение доказательству с использованием интерактивной геометрической среды

Обучение доказательству геометрических утверждений является одной из главных целей школьного курса геометрии. Ее достижение обеспечивается включением в содержание школьных учебников образцов доказательства геометрических теорем, задач на доказательство, а также предъявлением требованию к обоснованию ключевых моментов решения задач на вычисление и построение.

Традиционно обучение доказательству связывается с формированием умений подтверждать истинность утверждений и правильность принимаемых решений логическими выводами дедуктивного характера. Эта традиция восходит к периоду развития математики, когда только рассуждения, опирающиеся на правила логического вывода, считались убедительными и строгими. Сегодня отношение математиков к логическому доказательству постепенно меняется под влиянием компьютерной техники [24]. Они всерьез задумываются над той ролью, которую играет в доказательстве теорем компьютерный эксперимент, проводимый по схеме полной индукции («компьютерное доказательство»).

Использование возможностей «компьютерного доказательства», на наш взгляд, позволит снять многие трудности, которые испытывают учащиеся 7 класса на первых этапах обучения доказательству, сделать переход к новой форме познания более «безболезненным».

Предлагаем рассматривать этапные цели обучения доказательству с точки зрения трех основных уровней:

I. **Эмпирический уровень** (достигается к концу изучения первых тем систематического курса 7 класса) – умение обосновывать истинность геометрических утверждений с помощью полного компьютерного эксперимента («компьютерного доказательства») на готовых (или самостоятельно построенных) динамических чертежах.

II. **Технологический уровень** (достигается к концу 7 класса) - умение осуществлять логический контроль корректности отражения условия теоремы (задачи) динамическим чертежом и корректности использования самого чертежа при проведении «компьютерного доказательства».

III. **Абстрактно-теоретический уровень** (достигается к концу 9 класса) – умение проводить логические доказательства геометрических утверждений с целью логического объяснения результатов компьютерного эксперимента.

Рассмотрим методические условия, которые обеспечат достижение представленных выше целей.

Достижение эмпирического уровня сформированности умений доказывать осуществляется с опорой на субъектный опыт учащихся, связанный с подтверждением истинности утверждений ссылкой на их очевидность (возможность подтверждения результатами наблюдения) или практическую проверяемость (возможность подтверждения опытом и экспериментом).

Этот этап обучения должен быть направлен на решение трех образовательных задач:

– обучение выделению условий проведения эксперимента и его целей;
– обучение планомерности и полноте перебора вариантов в ходе эксперимента;
– обучение оформлению отчетов о проведенном эксперименте, включающих описание его условий, цели, хода и результатов.

Необходимость решения этих образовательных задач определена тем, что соответствующих им знаний и умений нет в содержании субъектного опыта большинства учащихся.

Методика обучения доказательству на данном этапе опирается на схему интеграции субъектного опыта с социальным, которая предложена И.С. Якиманской [28]: 1) актуализация субъектного опыта учащихся, отнесенного к изучаемому вопросу; 2) раскрытие содержания субъектного опыта учащихся; 3) «окультуривание» содержания субъектного опыта учащихся через его сопоставление с социокультурным образцом и переосмысление; 4) формирование нового субъектного опыта учащихся.

Деятельностную основу реализации этой методической схемы составляет деятельность планирования, проведения и описания компьютерных экспериментов с постепенным повышением степени самостоятельности учащихся.

Рассмотрим примерный вариант методики работы с задачами на доказательство и теоремами для достижения намеченных результатов на примере работы с теоремой о сумме смежных углов.

Постановка задачи на доказательство данной теоремы может быть продолжением разговора о связи величин смежных углов (задача 1 в разделе для самостоятельного решения сразу после выполнения упражнения 3 в теме Смежные и вертикальные углы [18]). Мотивом может выступать необходимость объяснения выявленной в ходе выполнения упражнения 3 зависимости величин смежных углов.

1. *Актуализация субъектного опыта учащихся, связанного с аргументированием утверждений (как мотивация проведения компьютерного доказательства).*

Работа с теоремой должна начинаться с формирования потребности учащихся подтвердить свое мнение о справедливости «очевидного» с их точки зрения утверждения компьютерным экспериментом. Мотив может быть внешним – интерес к работе с компьютером. Для его использования учащимся дается творческое задание - придумать способ наглядной демонстрации справедливости данного утверждения в ИГС. Результатом выполнения этого задания с опорой на субъективные представления учащихся о «*наглядной убедительности*» и знания о возможностях ИГС будут различные варианты компьютерных чертежей. На *рисунке 102* представлены варианты иллюстрации утверждения о равенстве суммы смежных углов 180^0, предложенные учащимися.

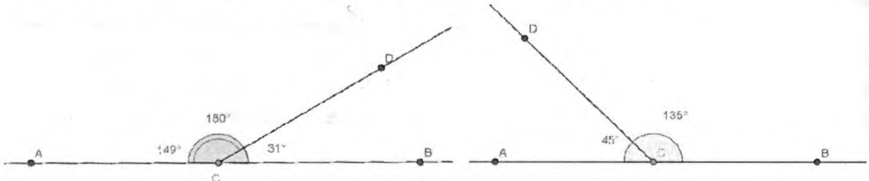


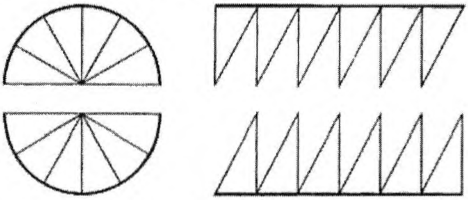
Рис. 102

2. *Раскрытие содержание субъектного опыта учащихся (как выявление значимых условий и цели проведения «компьютерного доказательства»).*

Данный этап работы по своему содержанию сходен с работой по анализу формулировки теоремы (задачи) с целью выделения условия и заключения теоремы (данных и требования задачи). Однако объектом анализа здесь будет уже не сама формулировка, а ее изображение – иллюстративный материал предложенный учащимися. Отражением значимых условий проведения эксперимента признаются шаги построения чертежа, которые обеспечивают сохранение отношения «смежности» построенных углов при любых случайных или намеренных изменениях чертежа. Наглядным выражением цели эксперимента являются дополнительные записи, которые делают «видимым» доказываемый факт.

3. *Окультуривание опыта (как планирование хода «компьютерного доказательства»).*

Планирование хода компьютерного доказательства (особенно если оно проводится впервые) имеет смысл предварить рассказом о традициях представления доказательств в Древней Индии, связанных с наглядным представлением не столько самого доказываемого факта, сколько универсальных практических действий с геометрическими объектами, которые сводят его к утверждению, истинность которого не подвергается сомнению (*рис. 103*).



Смотри!

Рис. 103

Эти сведения смогут явиться отправной точкой включения учащихся в деятельность оценки предложенных ими чертежей. Например, перед учащимися может быть поставлено задание выбрать из всех предложенных ими динамических чертежей, те которые могут быть использованы для демонстрации *динамической устойчивости* иллюстрируемого утверждения, описать план действий с чертежом для такой демонстрации?

Результатом выполнения подобных заданий является установление и обсуждение наиболее типичных ошибок, совершаемых учащимися при построении чертежа. Такими ошибками являются статичность предложенных чертежей или их неконтролируемая динамичность.

Для установления контроля над динамичностью чертежа учитель может предложить учащимся воспользоваться инструментом «ползунок» (при обучении с использованием GeoGebra).

Проблема введения «ползунка», которую ставит этим предложением перед учащимися учитель, является проблемой параметризации условия теоремы - дополнения его параметром – указанием на количественное свойство объектов, оговоренных условием теоремы, вне зависимости от значения которых должно выполняться ее заключение.

В рассматриваемом примере такое свойство является очевидным и единственным - величина одного из смежных углов. После введения параметра формулировка теоремы примет следующий вид: «Сумма смежных углов равна $180°$ вне зависимости от конкретных значений этих углов». Заметим, что чаще выбор такого свойства является не столь однозначным. Если таких свойств несколько, то нужно принимать решение о том, какие из них будем считать параметрами, а какие переменными с фиксированным значением. Кроме того, возникает вопрос относительно каждого параметра в отдельности или из соотношения будет исследоваться устойчивость заключения теоремы. Это уже вопрос о планировании эксперимента. К необходимости планирования эксперимента учащихся приводит и необходимость указания при задании ползунка наименьшего и наибольшего значения параметра, определения шага перебора его допустимых значений. В рассматриваемом примере интервал обследуемых значений параметра задается аксиомой измерения углов: от 0° до 180° (*рис. 104*).

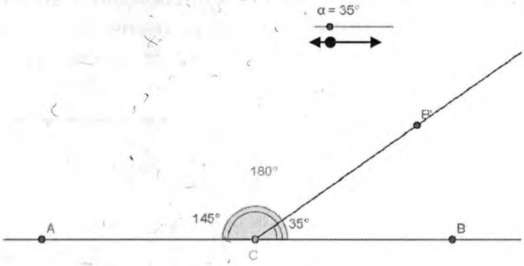


Рис. 104

4. Формирование нового опыта (как описание условия, хода и результатов компьютерного доказательства).

Первые представления о правилах оформления отчетов об экспериментах учащиеся получают на уроках физики в 7 классе при выполнении лабораторных работ. Перенос правила описания физического эксперимента на случай компьютерного эксперимента по геометрии задает следующий образец оформления компьютерного доказательства:

Дано:

$\angle BCB'$ и $\angle B'CA$ - смежные углы

Доказать:

$\angle BCB' + \angle B'CA = 180°$

Обоснование (методом компьютерного эксперимента).

Цель эксперимента – проверка независимости суммы $\angle BCB' + \angle B'CA$ от величин самих углов.

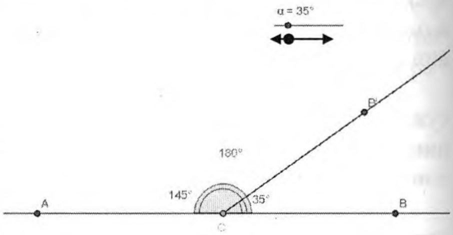


Рис. 105

I. Построения динамического чертежа

1. Построить прямую *AB*
2. На прямой между точками *A* и *B* отметить точку C.
3. Задать параметр α - величину угла, изменяющуюся от 0° до 180°.
4. Построить угол BCB' величины α.
5. Задать отображение величин углов $\angle BCB'$, $\angle B'CA$ и их сумму на экране.

II. Ход эксперимента

Задаем изменение величины угла α от $0°$ к $180°$ с постепенно уменьшающимся шагом $1°$; $0{,}1°$; $0{,}01°$; $0{,}001°$ и т.д.

Следим за изменением/сохранением суммы $\angle BCB' + \angle B'CA$.

Вывод. Сумма $\angle BCB' + \angle B'CA$ при всех изменениях остается равной $180°$.

Эмпирический уровень сформированности умений доказывать является достаточным для начала работы по формированию представлений учащихся о различиях между теоремами – свойствами, теоремами – признаками, теоремами – критериями. Для этого должна быть организована деятельность учащихся по выделению системы значимых условий проведения компьютерного эксперимента для обоснования взаимно-обратных утверждений (см. *пример 1*).

Пример 1. Построение динамических чертежей для компьютерного доказательства утверждений: «Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны» и «Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны».

1. Дано: $a \parallel b$, секущая e, $\angle F$ и $\angle E$ – внутренние накрест лежащие углы.

Доказать: $\angle F = \angle E$

Доказательство (компьютерное)

Построение динамического чертежа

1. Построить прямую *a*.
2. Отметить точку *E* не лежащую на *a*.
3. Провести прямую $b \parallel a$ через *E*.
4. Задать параметр α – угол наклона секущей *e* к прямой *b* со множеством значений от $0°$ до $90°$.
5. Провести прямую *e* через точку *E* под углом *α*.
6. Отметить внутренние накрест лежащие углы $\angle F$ и $\angle E$.

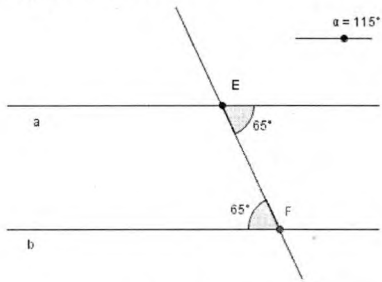


Рис. 106

2. Дано: прямые *a* и *d* и секущая *e*, $\angle F = \angle C$ – внутренние накрест лежащие.

Доказать: $a \parallel d$

Доказательство (компьютерное)

Построение динамического чертежа

1. Построить прямую *a*.
2. Задать параметр α – угол наклона прямой *e* к *a* со множеством значений от $0°$ до $90°$.
3. Отметить точку *F* на прямой *a*.
4. Построить прямую *e* под углом α к прямой *a* с вершиной в точке *C*.
5. Отметить на прямой *e* точку *C*.
6. Построить прямую *d* под углом α к прямой *a* с вершиной в точке *C* и накрест лежащим к ранее построенному углу.

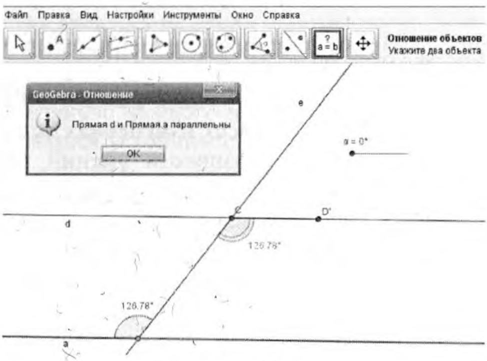


Рис.107

Достижение технологического уровня сформированности умений доказывать характеризуется приобретением умений осуществлять теоретический контроль корректности построения и использования динамического чертежа при поведении компьютерных доказательств. Подобные умений учащиеся приобретают при изучении курса «Информатика и вычислительная техника» в результате обучения обоснованию компьютерных программ.

Обоснование компьютерной программы представляет собой снабжение ее дополнительной информацией, объясняющей логическое строение программы, облегчающей проверку ее корректности.

Таким образом, обучение доказательству на этом уровне согласуется с методической схемой обучения обоснованию компьютерных программ, которая реализуется в курсе информатики и вычислительной техники:

1. Мотивация дополнения программы обоснованием.
2. Ознакомление со способами обоснования программ.
3. Обучение обоснованию и использованию обоснований для проверки корректности программ.

Обоснование алгоритма построения динамического чертежа, создаваемого для проведения компьютерных доказательств геометрических утверждений, должно обеспечить предотвращение следующих ошибок:

– ограниченность динамического чертежа (невозможность «просмотра» на нем всех геометрических объектов) определенного условием задачи или теоремы;

– динамическая неустойчивость (изменчивость) свойств, оговоренных условием задачи или теоремы;

– неоднозначность исполнения команд алгоритма.

Теоретической основой обоснования алгоритма построения динамического чертежа являются аксиомы, определения и признаки геометрических понятий, фигурирующих в условии теоремы (задачи). Так, например, определение и признаки параллелограмма задают различные алгоритмы построения параллелограмма в ИГС (*таблица 6*).

Таблица 6

Алгоритмы построения параллелограмма в GeoGebra

Определение и признаки в учебнике [3]	Алгоритм построения
Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны	1. Построить прямую AB по двум точкам. 2. Отметить точку C, не лежащую на прямой AB. 3. Провести через точку C прямую, параллельную прямой AB. 4. Через точку B провести прямую, параллельную AC. 5. Построить четырехугольник с вершинами в точках пересечения всех построенных прямых
Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник - параллелограмм	1. Построить отрезок AB и отрезок AC. 2. Построить две окружности: с центром в точке C и радиусом AB; с центром в точке B и радиусом AC. 3. Построить четырехугольник с вершинами в точках ABC и в одной из точек пересечения окружностей.
Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм	1. Построить прямую AB по двум точкам. 2. Отметить точку C, не лежащую на прямой AB. 3. Провести через точку C прямую, параллельную прямой AB. 4. На построенной прямой отложить отрезок равный AB с началом в точке C. 5. Построить четырехугольник с вершинами в построенных четырех точках.
Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник - параллелограмм	1. Построить отрезок AB. 2. Отметить его середину - C. 3. Отметить точку D, не лежащую на прямой, содержащей отрезок AB. 4. Построить точку D' симметричную точке D относительно C. 5. Построить четырехугольник с вершинами в точках $ABDD'$.

Рассмотрим методику обучения обоснованию алгоритма построения динамического чертежа на примере методики работы со следующей задачей: «Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины отрезков OA, OB, OC и OD - параллелограмм» (задача 382 из [3]).

1. Мотивация дополнения описания алгоритма его обоснованием.

Наличие у учащихся опыта построения динамических чертежей и использования их для проведения компьютерных доказательств позволяет предложить учащимся данную задачу для самостоятельного решения в ИГС. Инструменты Geogebra и теоретические знания учащихся позволяют реализовать различные алгоритмы построения динамического чертежа (см. *таблицу 6*). Публичная защита учащимися своего решения позволяет обнаружить множественность алгоритмов, что приводит к постановке вопроса о критериях оценки правильности решения задачи. Усилить мотивационный эффект можно путем дополнения алгоритмов представленных учащимися алгоритмами, содержащими основные ошибки, описанные выше:

1) Ошибка ограниченности динамического чертежа, возникшая из-за задания неверного указания области значений угла (*рис.108*).

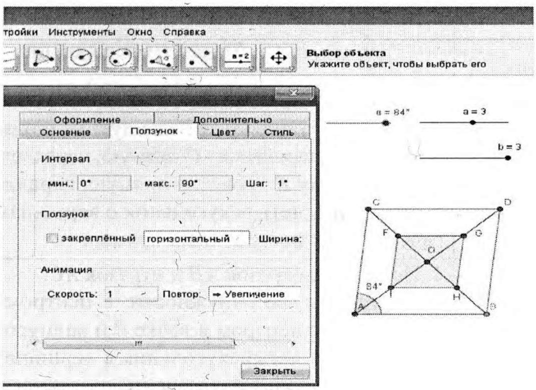


Рис. 108

2) Ошибка динамической неустойчивости свойств заданного объекта (*рис. 109*).

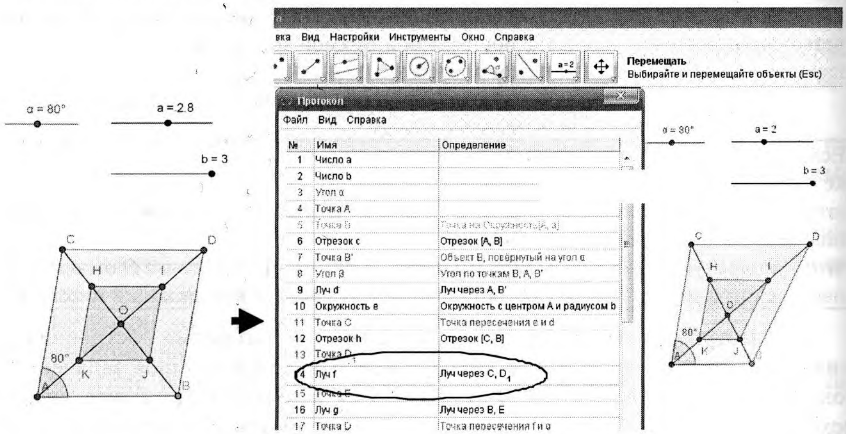


Рис. 109

3) Неоднозначность исполнения алгоритма, т.е. возможность построения несколько различных геометрических фигур описанным способом (*рис. 110*).

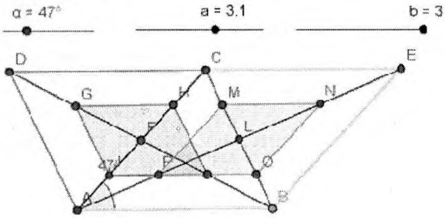


Рис. 110

2. *Ознакомление с обоснованием алгоритма как одним из способов проверки его корректности.*

Ознакомление с обоснованием алгоритма имеет смысл начинать с рассказа о более известном методе проверки корректности алгоритмов - тестировании программы, т.е. проверки соответствия результатов действия программы эталонам. Здесь важно показать, что тестирование позволяет обнаружить лишь один тип ошибок - неустойчивость свойств динамического чертежа). Более широкими возможностями обладает обоснование. Оно является разновидностью семантической проверки корректности программы, т.е. проверки корректности алгоритма по смыслу его шагов и их последовательности. Сегодня такую проверку проводят специальные экспертные программы, которые сопоставляют шагам и группам шагов алгоритма утверждения, хранящиеся в базе знаний [25]. В качестве утверждений для семантической проверки построения динамических чертежей могут использоваться аксиомы, определения и теоремы геометрии.

В качестве материала для демонстрации образца применения обоснования может быть использован один из предложенных учащимися алгоритмов построения динамического чертежа к задаче:

Описание построения динамического чертежа в решении задачи	Обоснование
1. Задать параметры *a* – длину стороны параллелограмма с множеством значений от 0 до произвольно выбранного положительного числа.	По определению понятия длина отрезка.
2. Построить отрезок *AB* длины *a*	По аксиоме откладывания отрезков.
3. Задать параметр α – величину угла параллелограмма со стороной *AB* с множеством значений от 0° до 180° .	По определению понятия угла
4. Построить угол *BAB'* величины α.	По аксиоме откладывания углов
5. Задать параметры *b* – длину стороны параллелограмма с множеством значений от 0 до произвольно выбранного положительного числа	По определению понятия «длина отрезка»
6. Построить окружность с центром *A* и радиусом *b*.	По определению окружности
7. Отметить точку *C* – точку пересечения окружности и луча *AB'*.	По определению луча
8. Провести прямую *e*, параллельную *AB* через точку *C*.	По аксиоме параллельных
9. Провести прямую *f*, параллельную *AC* через точку *B*.	
10. Отметить точку *D* - точку пересечения прямых *e* и *f*.	По следствию из аксиомы параллельных
и т.п.	

На этом этапе важно показать учащимся возможности использования обоснования не только для подтверждения правильности «своих» алгоритмов, но и обнаружения ошибок ограниченности и неоднозначности исполнения алгоритма.

3. *Обучение обоснованию и использованию обоснований для проверки корректности алгоритма*

Целью данного этапа является формирование умений осуществлять подбор утверждений обосновывающих корректность отдельных шагов алгоритма, а также утверждения, обосновывающего их последовательность – идею алгоритма построения (см. *таблицу 6*). Здесь большую пользу окажут задачи на построение циркулем и линейкой, задачи на построение стационарных и динамических чертежей в ИГС, решаемые с пошаговым обоснованием построения.

Достижение абстрактно-теоретического уровня сформированности умений доказывать характеризуется приобретением умений логически объяснять причины динамической устойчивости исследуемого свойства. Переход к этому этапу обучения начинается в момент столкновения учащихся с ситуацией, когда обоснование корректности динамического чертежа раскрывает и причины истинности заключения, т.ė. в ситуациях столкновения с конструктивным доказательством. Напомним, что конструктивными называются доказательства, которые представляют собой описание последовательности конструктивных действий по получению объекта, обладающего требуемыми свойствами.

Примерами конструктивных доказательств в школьном учебнике геометрии [3] являются доказательства: первого и второго признаков равенства треугольника, существования перпендикуляра к прямой, проведенного из не лежащей на ней точки, признака равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету, существования и единственности точки пересечения высот треугольника, существования окружностей вписанной и описанной около треугольника, возможности откладывания вектора равного данному от любой точки, законы сложения векторов, сведения вычитания векторов к сложению.

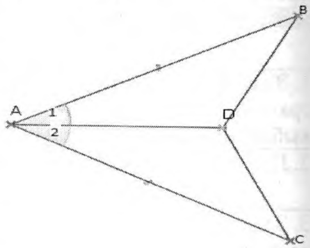


Рис. 111

В качестве ситуаций, демонстрирующих учащимся возможность обоснования геометрических рассуждений без проведения компьютерных экспериментов (с опорой на одни логические рассуждения) могут быть использованы и некоторые ранее решенные на эмпирическом уровне задачи на доказательство из учебника.

Пример 2. «На сторонах угла отложены равные отрезки $AB=AC$. На его биссектрисе выбрана точка D. Докажите, что треугольники ABD и ACD равны».

Доказательство (конструктивное)

Построение динамического чертежа

1. Выберем параметр α – величина заданного угла с областью значений от $0°$ до $180°$.
2. Отложим луч AA_1.
3. По аксиоме откладывания отрезков в выбранную полуплоскость относительно AA_1 можно отложить угол со стороной AA_1 величины α и при том только один - $\angle A_1AA_2$.
4. Проведем биссектрису AA_3 угла $\angle A_1AA_2$.
5. Выберем на стороне AA_1 произвольно точку C.
6. Отложим отрезок AB на стороне AA_2, равный AC как симметричных AC относительно биссектрисы AA_3.
7. Отметим произвольно на биссектрисе точку D.
8. Соединим точки DC и DB.

Вывод: треугольники ACD и ABD, так как образованы точками, связанными преобразованием симметрии относительно прямой AA_3.

Несмотря на то, что обучение на данном уровне не предполагает обращения к компьютерному эксперименту, ИГС может быть использована и здесь в рамках реализации когнитивно-визуального подхода к обучению логическим доказательствам, предложенного В.А. Далингером [5].

Главной идеей этого подхода является предоставлений учащимся наглядной опоры логических действий:

1) синтеза образа геометрической конструкции, заданной условием теоремы (задачи);

2) преобразования исходного образа геометрической конструкции (выявление скрытых отношений, введение дополнительных построений, изменение взаимного положения частей конструкции);

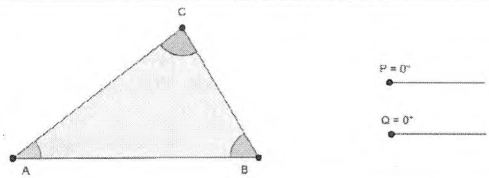
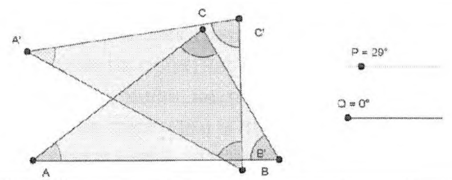
3) выделение части геометрической конструкции для подведения ее под новое понятие;

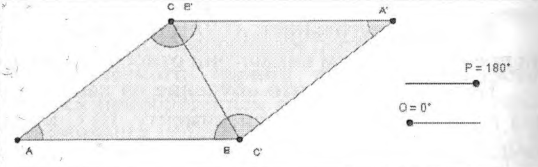
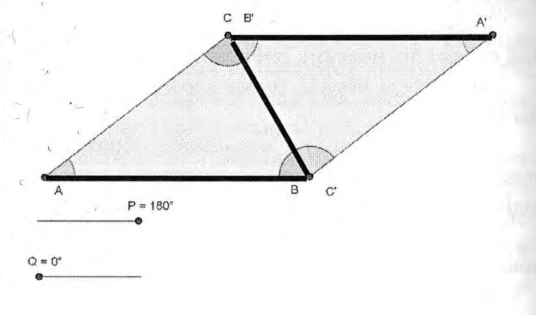
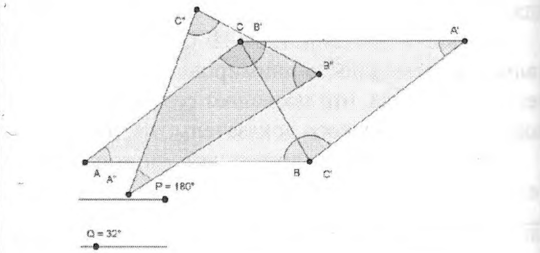
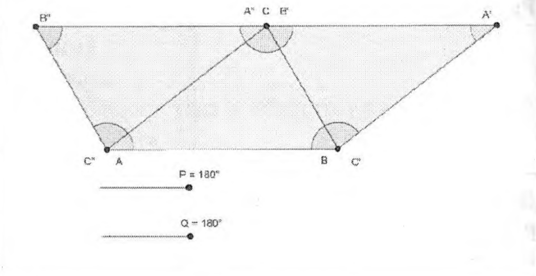
4) выделение набора элементов геометрической конструкции, свойства которых являются посылкой логического вывода;

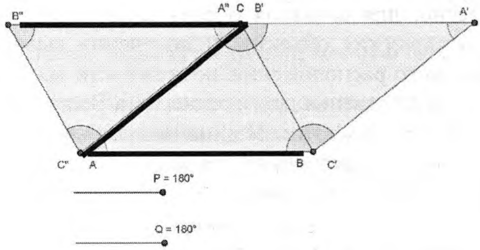
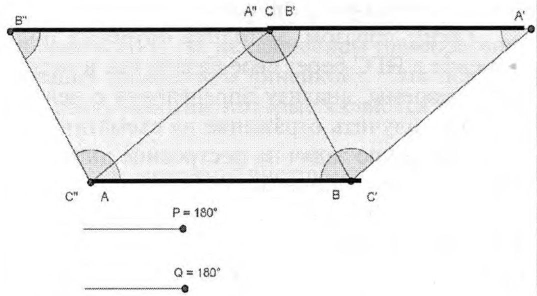
5) конструирование последовательности сменяющих друг друга образов для иллюстрации процесса перехода к пределу.

Главным достоинством ИГС в реализации когнитивно-визуального подхода является возможность анимирования процесса построения и изменения динамического чертежа, что позволяет создавать наглядную опору не только для отдельного шага логического доказательства, но и всего хода доказательства в целом.

Пример 3. Раскадровка анимационного сопровождения одного из доказательств теоремы о сумме углов треугольника в GeoGebra.

Шаг доказательства	Визуализация шага на анимированном динамическом чертеже
Рассмотрим треугольник ABC	
Дополним треугольник ABC равным ему треугольником, полученным при повороте ABC относительно середины BC на $180°$. При вершине C **получим** угол ACA' равный сумме двух	

углов треугольника *ABC*.	
Так как внутренние накрест лежащие углы при прямых *AB* и *A'B'* и секущей *BC* равны, то **прямые параллельны**.	
Дополним чертеж еще одним треугольником, полученным из *ABC* поворотом относительно середины *AC* на угол 180°. При вершине *C* **получим** угол *B''CA'* равный сумме трех углов треугольника *ABC*.	
	

Так как внутренние накрест лежащие углы при прямых AB и $A''B''$ и секущей BC равны, то **прямые параллельны**.	
Так как через точку C проведены две прямые, параллельные AB, то точки B'', C и A' лежат на одной прямой. Следовательно угол $B''CA'$ - развернутый и сумма углов треугольника равна 180°.	

3.3. Построения в интерактивной геометрической среде: обучение постановке и решению задач

Привлечение возможностей интерактивной геометрической среды (ИГС) к учебному познанию начинается с постановки и решения задач на построения динамического чертежа. О самих динамических чертежах и особенностях их построения в средах Geogebra и GEONExT подробно рассказывалось в *главе 1*. Здесь остановимся на обсуждении методических особенностей обучения постановке таких задач и их решению.

Эти методические особенности определяются:

- сходством деятельности по постановке задач на построение в ИГС с деятельностью по выявлению свойств геометрических объектов, которые должны быть отражены на схематическом чертеже, иллюстрирующем условие задачи, теоремы или определяющую часть определения понятия;
- сходством деятельности по решению задач на построение в ИГС с деятельностью по решению задач на построение циркулем и линейкой.

Задачи на построение в ИГС не являются чем-то самостоятельным. С их постановки и решения начинается решение всякой геометрической задачи, доказательство любой теоремы, получение или осмысление определения геометрического понятия. Они являются своего рода самостоятельно формулируемыми подзадачами. Этим и определяется их сходство с построением схематических чертежей.

Схематический чертеж к задаче, теореме или определению используется, как известно, для создания образа типичного представителя множества изучаемых геометрических объектов и получения выводов об их позиционных свойствах (взаимного расположения, возможности выделения и переосмысления части объекта с точки зрения других понятий). В связи с этим только позиционные свойства на них и отражаются. У динамических чертежей, несколько другое предназначение. Они создают образ всего множества изучаемых объектов и предназначены для получения выводов об устойчивости и изменчивости не только их позиционных, но и метрических свойств. В этой связи способ построения динамических чертежей должен быть таким, чтобы сохранять все свойства изучаемых объектов, которые оговорены условием задачи, теоремы, определяющей частью определения понятия. Эти же требования предъявляются к построению геометрических объектов циркулем и линейкой.

Таким образом, методика обучения постановке и решению задач на построение в ИГС берет свое начало как в методике обучения анализу условия задачи, теоремы, анализу определения с целью выделения тех свойств, которые должны получить отражение на схематическом чертеже, так и в методике обучения решению задач на построение циркулем и линейкой. Однако она обладает и своими особенностями.

Первая из этих особенностей определена тем, что с постановки и решения задачи на построение в ИГС начинается решение всякой геометрической задачи, доказательство всякой теоремы с привлечением возможностей среды. Для своевременной подготовки учащихся к этой деятельности задачи на построение в ИГС должны образовывать *непрерывно развивающуюся* – содержательно-методическую линию пронизывающую весь систематический курс геометрии. Эта линия должна вобрать в себя и линию задач на построение циркулем и линейкой, которая в соответствии с действующим планированием развивается эпизодически (см. *таблицу 7*).

Таблица 7

Место линии задач на построение циркулем и линейкой в содержании курса геометрии 7-9 классов

Класс	Тема, количество часов обучения решению задач на построение	Виды задач и методы их решения
7	Треугольники (2-3ч.)	Построение методом геометрического места точек (ГМТ): угла, равного данному, биссектрисы угла, перпендикулярных прямых, середины отрезка.
	Соотношение между сторонами и углами треугольника (2-4ч.)	Построение методом ГМТ треугольника по трем элементам.
8	Четырехугольники (1-2ч.)	Решение задач на построение четырехугольников, сводящихся к базовым, разделение отрезка на n частей (по теореме Фалеса).
	Подобные треугольники (1-2ч)	Решение задач на построение методом подобия, сводящихся к базовым.

9	Длина окружность и площадь круга (1ч)	Построение правильных многоугольников методом ГМТ
	Движение (1ч)	Решение задач на построение методом движения.

Представленные в *таблице 7* данные показывают, что основными результатами обучения решению задач циркулем и линейкой являются следующие:

– знания о конструктивных возможностях циркуля и линейки;

– знания об особенностях решения задач на построения;

– знания о некоторых методах решения задач на построение: методом ГМТ, методом подобия, методом движения;

– навыки решения базовых задач на построение;

– умения решать задачи на построение, сводящиеся к базовым.

Эти образовательные результаты могут и должны быть достигнуты и при обучении решению задач на построение в ИГС (за исключением приобретения практических навыков манипулирования циркулем и линейкой). Эта возможность определяется наличием в ИГС инструментов, которые являются аналогами циркуля и линейки:

- «*циркуль*»; - «*прямая по двум точкам*» (инструменты Geogebra);

- «*окружность (радиус через другие объекты)*»; - «*прямая*» (инструменты GEONExT).

Использование этих инструментов в отличие от использования циркуля и линейки акцентирует внимание учащихся на условиях задания фигуры (наборе элементов, определяющем фигуру – характеристических элементах), так как сами построения выполняются автоматически. Кроме того наборы характеристических элементов фигуры выделяются в графическом окне цветом и отмечаются на панели объектов как свободные объекты (*рис. 112*).

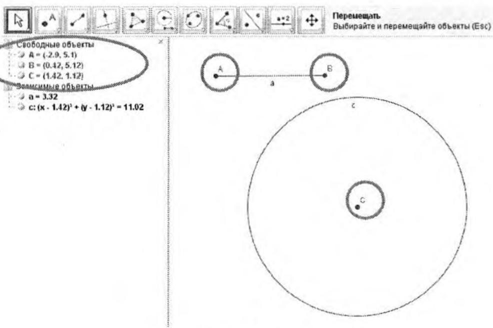


Рис. 112

Наличие в ИГС дополнительных инструментов, выводящих на экран результаты решения базовых задач на построение циркулем и линейкой («*биссектриса угла*», «*середина отрезка*», «*параллельная прямая*» и др.), а также наличие в ИГС возможности пополнения конструктивных инструментов. Могут использоваться двояко:

1) в том случае, когда овладение способом решения соответствующих задач на построение циркулем и линейкой преждевременно из-за отсутствия базовых теоретических сведений у учащихся;

2) в том случае, когда способ решения таких задач уже достаточно усвоен учащимися, и тратить учебное время на его воспроизведение не целесообразно.

На этапе овладения способами решения базовых задач на построение циркулем и линейкой дополнительные инструменты ИГС должны быть убраны с панели инструментов. В среде Geogebra это делается следующим образом. На вкладке «*Инструменты*» выбирается вкладка «*Настройка*». Затем в появившемся диалоговом окне нужно найти «*Панель инструментов*». Из перечня выбрать тот инструмент, который хотите запретить и нажать последовательно клавиши «*Удалить*» и «*Применить*» (*рис. 113*).

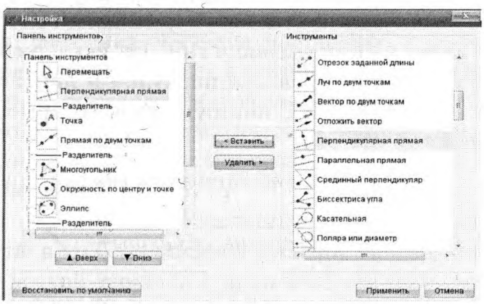
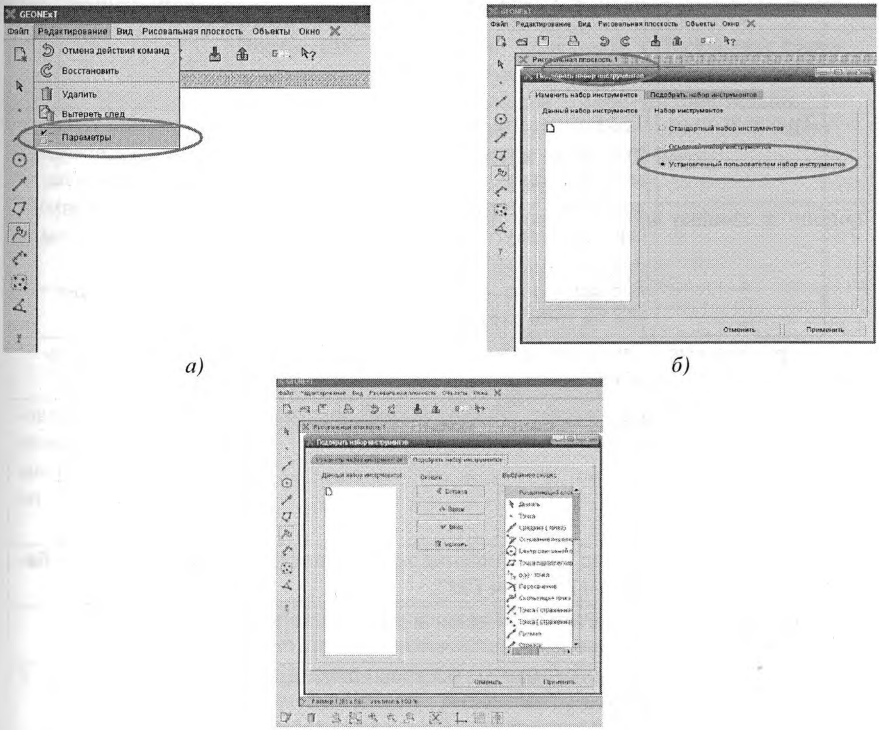


Рис. 113

Заметим, что для того чтобы вернуть инструмент на панель инструментов необходимо выполнить обратные действия: из перечня в правом окне выбрать нужный и нажать «*Вставить*» и «*Применить*», или просто «*Восстановить по умолчанию*» стандартный вид панели инструментов.

При работе со средой GEONExT панель инструментов настраивается следующим образом. На вкладке «*Редактирование*» выбирается «*Параметры*» (*рис. 114а*). Затем в открывшемся диалоговом окне ставится флажок у надписи «*Установленный пользователем набор инструментов*» (*рис. 114б*), затем проводится подбор набора инструментов (*рис. 114в*) способом сходным с описанным выше для Geogebra.



а) б)

в)

Рис. 114

Наличие дополнительных инструментов в ИГС позволяет, как уже отмечалось выше, включать учащихся в деятельность постановки и решения задач на построение динамических чертежей до появления теоретических возможностей обоснования способов их решения. Это дает возможность распределить учебный материал, относящийся к построению в ИГС, а также циркулем и линейкой как в соответствии с потребностями использования динамических чертежей, так и уровнем теоретической подготовки учащихся (*таблица 8*).

Таблица 8

Линия задач на построение в курсе геометрии 7-9 классов при обучении с использованием ИГС

Класс	Тема	Построение в ИГС	Построение циркулем и линейкой
7	Начальные геометрические сведения	Теоретические основы работы инструментов: «точка», «отрезок», «прямая», «луч», «угол», «угла заданной величины». Построение середины отрезка, биссектрисы угла, перпендику-	Построение отрезка и прямой, луча заданных двумя точками. Построение отрезка

		лярных и параллельных прямых.	равного данному.
	Треугольники	Теоретические основы работы инструментов: «середина отрезка», «биссектриса угла», «перпендикулярные прямые» Постановка задач на построение треугольника, равнобедренного треугольника. Способы построение задач на построение треугольников по трем элементам	Построение угла, равного данному, биссектрисы угла, перпендикулярных прямых, середины отрезка, треугольника по трем элементам.
	Параллельные прямые	Теоретические основы работы инструмента «параллельные прямые».	Построение параллельных прямых.
	Соотношение между сторонами и углами треугольника.	Построение прямоугольных треугольников,	Исследование условий разрешимости задач по построение треугольников по трем элементам.
		Метод ГМТ. Решение задач на построение, сводящихся к базовым методом ГМТ.	
8	Многоугольники	Теоретические основы работы инструмента «многоугольник».	-
		Решение задач на построение четырехугольников, сводящихся к базовым. Разделение отрезка на *n* равных частей (по теореме Фалеса).	
		Теоретические основы работы инструментов «отражение относительно точки», «отражение относительно прямой».	Построение фигур, симметричных данным относительно данной точки и данной прямой.
	Площадь	Постановка и решение задач на построение многоугольников, сводящихся к базовым. Теоретические основы работы инструмента «площадь».	-
	Подобные треугольники	Теоретические основы работы инструмента «гомотетия относительно точки».	-
		Метод подобия. Решение задач на построение методом подобия, сводящихся к базовым.	
	Отношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника.	Построение острых углов прямоугольных треугольников по значениям их тригонометрических функций.	
	Окружность	Теоретические основы работы инструмента «касательная», «окружность по трем точкам». Создание инстру-	Построение касательных к окружности по различным

		мента «вписанная окружность». Построение окружности вписанной, описанной около треугольника, вписанного и центрального углов. Теоретические основы работы инструментов «дуга по центру и двум точкам», «сектор по центру и двум точкам».	условиям. Построение окружности вписанной в треугольник, описанной около него.
	Векторы	Откладывание от данной точки вектора равного и пропорционального данному. Построение суммы и разности векторов.	
9	Метод координат	Построение вектора по его координатам. Построение окружности и прямой по их уравнениям.	-
	Соотношение между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов.	Построение угла по его тригонометрической функции.	
	Длина окружности и площадь круга.	Теоретические основы работы инструмента «правильный многоугольник». Построение сектора и сегмента. Теоретические основы работы инструмента «площадь» применительно к данным фигурам.	Построение правильных многоугольников методом ГМТ
	Движение	Теоретические основы работы инструментов «поворот вокруг точки на угол», «параллельный перенос по вектору».	Построение образов фигур при повороте вокруг точки на заданный угол в данном направлении, при параллельном переносе на данный вектор.
		Решение задач на построение методом симметрии и поворота, параллельного переноса.	

Таблица 8 показывает, что обучение построению с помощью инструментов ИГС должна, по нашему мнению, осуществляться в соответствии со следующей методической схемой:

1) обучение применению инструмента (пропедевтический);

2) формирование знаний о принципах его работы – раскрытие алгоритма решения соответствующей базовой задачи циркулем и линейкой и его теоретическое обоснование (основной);

3) формирование умений применять инструмент в сочетании с другими для решения типовых задач на построение и задач к ним сводящихся (заключительный).

Вторая особенность методики обучения построению в ИГС связана возможностью сочетать в одном решении различные способы задания характеристических элементов геометрической фигуры (арифметического, алгебраического, координатного, геометрического), а также переходить от одного способа задания к другому.

Пример 1. Особенности решение задачи: «Построить окружность, равновеликую кольцу, образованному двумя концентрическими окружностями с радиусами R и r, где $R > r$» в ИГС.

$S_{кол.} = \pi(R^2 - r^2) = S_{окр.}$, следовательно $r_{окр} = \sqrt{(R-r)(R+r)}$.

Для построения радиуса окружности циркулем и линейкой по двум данным отрезкам – радиусам данных концентрических окружностей R и r. Необходимо построить высоту, опущенную на гипотенузу длины $2R$ прямоугольного треугольника, которая делит эту гипотенузу на отрезки, равные R-r и R+r (*рис. 115*).

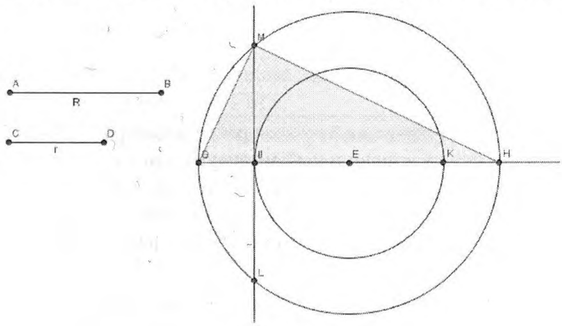


Рис. 115

При построении отрезка заданной длины в ИГС можно в диалоговом окне инструмента «*окружность по центру и радиусу*» указать выражение $\sqrt{(R-r)(R+r)}$ (*рис. 116*), или в строке ввода записать уравнение окружность с произвольно выбранным центром и данным радиусом (*рис. 117*).

Это делает не актуальным для учащихся освоение способов решения некоторых базовых задач на построение циркулем и линейкой. Например, в содержание линии задач на построение в ИГС нет смысла включать задачи построение четвертого пропорционального, среднего геометрического.

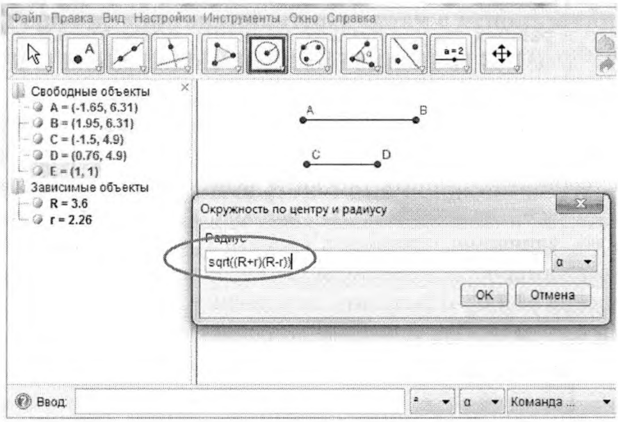


Рис. 116

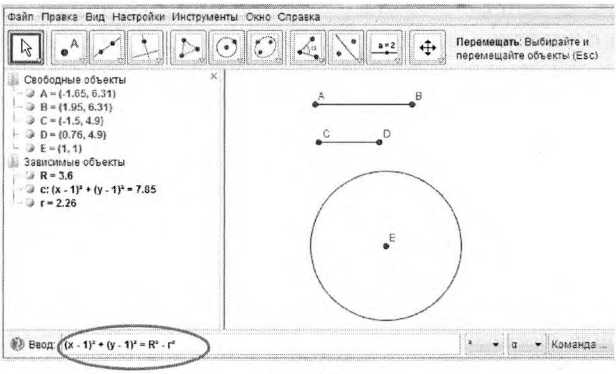


Рис. 117

Кроме того, возможность сочетания в одном решении различных способов задания геометрических объектов, размывает сами представления о различиях между методами решения задач на построение, установленными для построения циркулем и линейкой: алгебраический метод, метод координат, метод геометрических преобразования. В этих условиях освоение названных методов возможно лишь при введении временных запретов на использование некоторых возможностей ИГС (например, на задание фигуры уравнением, а величины выражением).

Третья особенность методики обучения построению в ИГС определяется необходимостью построения динамических чертежей для компьютерного сопровождения решения задач иными требованиями: на доказательство, на вычисление. Для этого необходимо ориентировать процесс обучения не только на построение в ИГС, но и на постановку задач на построение по условию задач с иными требованиями.

Пример 2. Постановка задачи на построение в ИГС по условию задачи «Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведенные к равным сторонам, равны» с целью выделения подзадачи на построение в ИГС (7 класс, тема «Треугольники»).

Для целей компьютерного доказательства необходимо подготовить динамический чертеж. Алгоритм построения должен быть таким, чтобы сохранять инвариантные свойства заданных условием задачи объектов: 1) равенство треугольников; 2) равенство сторон треугольников, к которым проведены медианы; и допускать вариацию остальных свойств объектов. Таким образом, для подготовки компьютерного доказательства необходимо решить следующую задачу на построение в ИГС: «Построить пару равных треугольников с медианами, проведенными к двум их сходственным сторонам» (*рис. 118*).

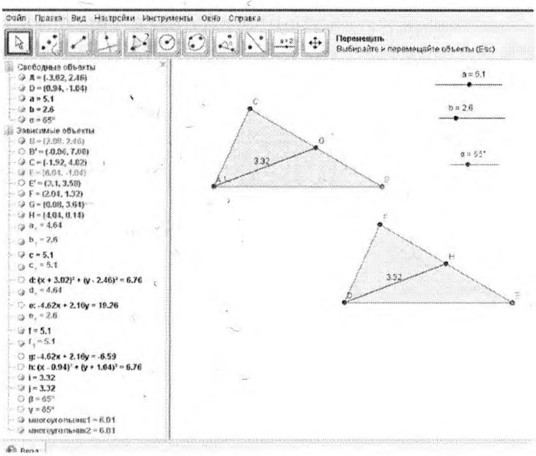


Рис. 118

Заметим, что далеко не всегда учащиеся готовы решать самостоятельно поставленную задачу в связи с ограниченностью их теоретических знаний. Так, например, в примере 2 получена задача, которая не может быть решена учащимися 7 класса самостоятельно до изучения признаков равенства треугольников, так как в GEONExT и Geogebra не предусмотрена возможность копирования фигур. В этом случае у учителя есть две возможности:

1) заготовить чертеж самому и предъявить его учащимся после постановки соответствующей задачи на построение для последующего использования;

2) предоставить ученику возможность построить динамический чертеж с помощью созданного учителем нового инструмента - «*треугольник равный данному по набору характеристических элементов*».

Второй способ более предпочтителен, так как само обращение к подобному инструменту требует от учащихся детализации условия поставленной задачи на построение в ИГС. Ученику необходимо принять решение о выборе набора параметров, задающих треугольники (на *рисунке 118* таким набором является задание треугольников по двум сторонами и углу между ними).

3.4. Решение многовариантных задач с использованием интерактивной геометрической среды «GeoGebra»

Многовариантными называются задачи, условие которых может быть реализовано несколькими различными способами [27]. В методической литературе встречаются и другие названия такому виду задач — задачи с альтернативным условием [6], вариативные задачи [11]. Такая неоднозначность является особенностью многих геометрических задач, заключающаяся в том, что решение задачи требует рассмотрения нескольких возможных конфигураций. В одних случаях по исходным данным можно выполнить несколько чертежей и найти несколько ответов, а в других только один удовлетворяет всем условиям задачи.

Многовариантные задачи являются одним из видов некорректных задач, о положительном влиянии которых на развитие интереса к изучению предмета и культуры мышления отмечено в работах Т.А. Безусовой, Э.Г. Гельфман, В.А. Крутецкого, Н.В. Метельского, Л.М. Фридмана, А.Ф. Эсаулова и др.

Несмотря на развивающий потенциал многовариантных задач, анализ школьных учебников геометрии показывает, что таковых в системе задач практически нет. Однако они нередко встречались на вступительных экзаменах в вузы, а с 2010 года стали особенно актуальны, попав в типовой набор заданий Единого государственного экзамена как планиметрическая задача С4 [4, 21]. Встретив впервые такую задачу на экзамене, естественно, не каждый учащийся способен ее решить.

Чтобы из обычной одновариантной получить многовариантную задачу часто используют, по мнению В. Дубровского [9], самый примитивный способ — в условии что-то не договаривают. Таковыми задачами и являются задачи типа С4 ЕГЭ.

Приведем примеры переконструирования одновариантных задач в многовариантные задачи по теме «Вписанная окружность».

Задача 1А. [№ 689, 2] В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Уберем соответствие между сторонами и их величинами.

Задача 1Б. В равнобедренном треугольнике со сторонами 10 и 13 см найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

По условию полученной задачи можно построить 2 чертежа, и она будет иметь два разных решения: $3\frac{1}{3}$ или $\frac{13\sqrt{231}}{66}$ см.

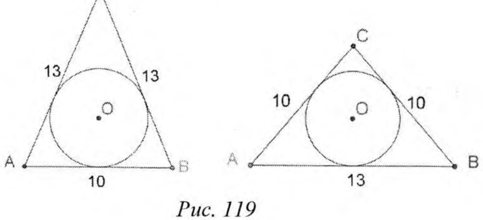


Рис. 119

Задача 2А. [№ 690, 2] Точка касания окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 3 см и 4 см, считая от основания. Найдите периметр треугольника.

Уберем порядок следования:

Задача 2Б. Точка касания окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 3 см и 4 см. Найдите периметр треугольника.

Опять получаем 2 альтернативных чертежа и два разных решения: 20 см или 22 см.

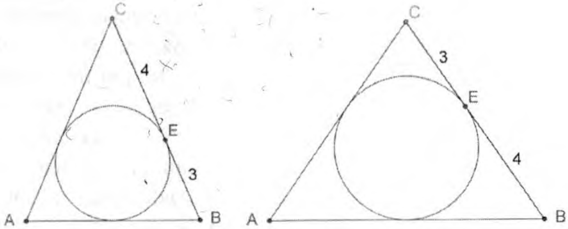


Рис. 120

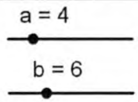
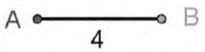
Задача 3А. [№ 690, 2] Найдите основание равнобедренного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении 12:5, считая от вершины, а боковая сторона равна 60 см.

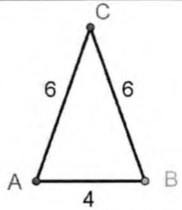
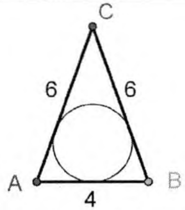
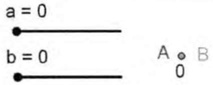
Уберем соответствие в отношении длин отрезков.

Задача 3Б. Найдите основание равнобедренного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении 12:5, а боковая сторона равна 60 см.

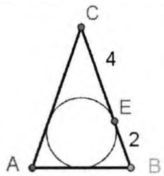
Может показаться, что в этой задаче, как и в предыдущих двух тоже должно быть два решения. Однако центр окружности не может делить высоту в обратном отношении, так как $h - r > r$. Тем менее, такая формулировка задачи является более интересной, так как допускает исследование условия задачи или ответа, если для обратного отношения задача будет формально решена.

Легко и быстро выявить все способы реализации условия многовариантной задачи помогает интерактивная геометрическая среда (ИГС), так как динамическая модель, выполненная по данным задачи, позволяет изменять значения величин и взаимное расположение отдельных элементов чертежа. Приведем пример построения динамической модели к *задаче 1Б* в ИГС «GeoGebra».

		1. Строим два ползунка a и b для варьирования длин равнобедренного треугольника.
		2. Строим основание треугольника AB — отрезок по точке и длине a, с отображением на чертеже значения его длины.

		3. Строим вершину C как точку пересечения окружностей с центрами в точках A и B и радиусом b. Соединяем точку C с A и B отрезками, отображаем на чертеже значения длин.
		4. Строим окружность, вписанную в треугольник: • биссектрисы углов A и C, • центр окружности как точку их пересечения, • точку касания как пересечение основания с биссектрисой угла C, • окружность по центру и точке касания.
		5. Устанавливаем ползунки a и b на нулевые отметки. 6. Передвигая движки ползунков, получаем два альтернативных чертежа к задаче.

Используя полученную модель в качестве шаблона, можно легко получить динамический чертеж к *задаче 2Б.*

		1. Снимаем отображение значений длин сторон треугольника. 2. Отмечаем точку касания. 3. Строим отрезки касательных с отображением на чертеже значений их длины. 4. С помощью второго ползунка устанавливаем длину боковой стороны, а с помощью первого получаем два альтернативных чертежа к задаче.

Следует отметить, что при решении *задачи 3Б* использование динамической модели не целесообразно, так как аккуратное выполнение динамической модели в ИГС подсказывает о существовании только одного чертежа, удовлетворяющего условию задачи.

А вот следующие задачи по той же теме, на наш взгляд, очень подходят для решения с использованием ИГС, так как имеет сложную конструкцию, которая определена не однозначно.

Задача 4. [№ 8б, С.135, 27] В треугольнике ABC и CDA (B и D по одну сторону от CA) вписаны окружности. Найдите длину общей внешней касательной к этим окружностям, если $AB = 7$, $BC = CD$, $DA = 9$.

Эксперимент, проведенный в ИГС с данной конструкцией, показывает, что ответ не только не зависит от длины отрезков AB, BC и BD, но и не зависит от взаимного расположения точек B, D и прямой CA.

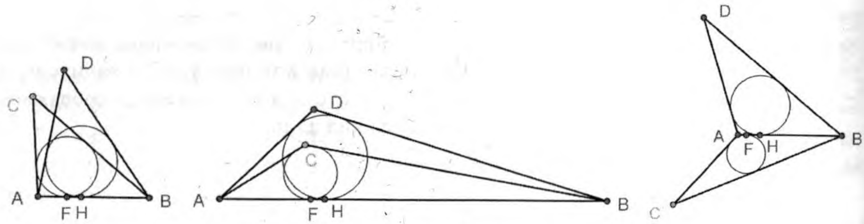


Рис. 121

Задача 5. [№ 690, 2] Прямые *AB* и *AC* — касательные к окружности с центром *O*, *B* и *C* — точки касания. Через произвольную точку *X*, взятую на дуге *BC*, проведена касательная к этой окружности, пересекающая отрезки *AB* и *AC* в точках *M* и *N*. Докажите, что периметр треугольника *AMN* и угол *MON* не зависят от выбора точки *X* на дуге *BC*.

Отметим, что в ИГС «GeoGebra» есть специальный инструмент для построения касательных, что значительно ускоряет построение чертежа. Однако в формулировке задачи имеется неточность: если точку *X* выбрать на бóльшей дуге, то периметр треугольника *AMN* будет зависеть от выбора точки *X,* а в случаях, когда касательная *MN* параллельна прямой *AB* или *AC*, треугольника не существует. Но этим и интересна именно такая, некорректная, формулировка задачи для исследования в ИГС.

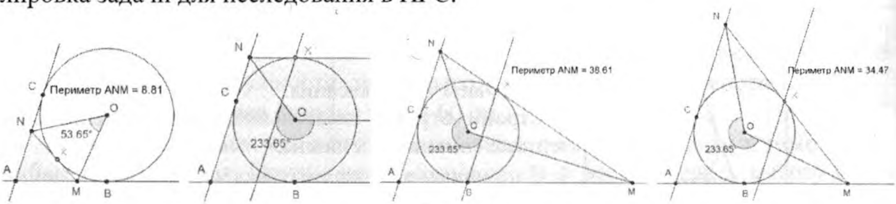


Рис. 122

В описанных выше случаях при переконструировании задач 1–3 получались две похожие задачи, которые решались одним способом. Наиболее интересными являются такие многовариантные задачи, в которых решения альтернативных вариантов условия находятся разными способами.

Приведем пример такой задачи из учебника геометрии.

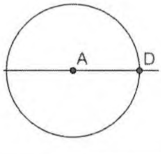
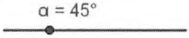
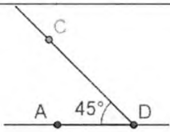
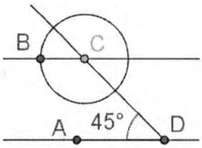
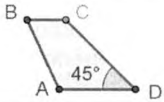
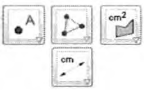
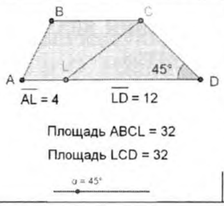
Задача 6А. [№ 1070, 2] В трапеции *ABCD* с основаниями $AD = 16$ см и $BC = 8$ см боковая сторона равна $4\sqrt{7}$ см, а $\angle ADC = 60°$. Через вершину *C* проведена прямая l, делящая трапецию на два многоугольника, площади которых равны. Найдите площадь трапеции и длину отрезка прямой l, заключенного внутри трапеции.

Многовариантность задачи заключается в том, что не известно, какая боковая сторона равна $4\sqrt{7}$ см *AB* или *CD*. Авторы известного учебника, включив эту задачу в свой учебник, дают только один вариант ответа. Тем не менее, присутствие такой задачи в учебнике геометрии идет только на пользу ученикам и учителям, а использование при ее решении ИГС подсказывает хорошее решение.

Выделим из данной задачи подзадачу.

Задача 6Б. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 16$ см и $BC = 8$ см. Через вершину C проведите прямую l, делящую трапецию на два многоугольника, площади которых равны.

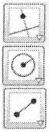
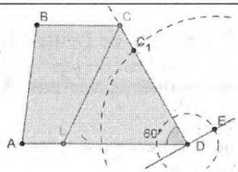
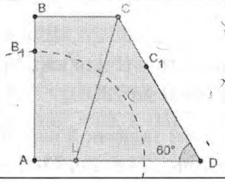
Построим в ИГС «GeoGebra» динамическую модель для ее решения:

		1. Строим основание трапеции $AD = 16$: • прямая a, • окружность с центром в точке A и радиусом 16, • пересечение прямой a с окружностью — точка D.
		2. Создаем ползунок α для варьирования угла трапеции от 0 до 180°.
		3. Проводим угол заданной величины α с вершиной в точке D и луч DA'. 4. Отмечаем на луче DA' точку C.
		5. Строим основание трапеции BC: • прямая b параллельная прямой a, • окружность с центром в точке C и радиусом 8, • пересечение прямой b с окружностью — точка B.
		6. Строим трапецию $ABCD$.
		7. Отмечаем на AD точку L. 8. Строим многоугольники $ABCL$ и CDL. 9. Измеряем их площади. 10. Измеряем расстояния от точки L до точек A и D.

Передвигая точку L вдоль отрезка AD, наблюдаем за изменением площадей многоугольников; находим такое ее положение, при котором площади равны. Изменяя длину боковой стороны трапеции CD и величину угла ADC, наблюдаем, что, хотя построенная трапеция и изменяется, отрезок CL делит ее площадь пополам. Объясняется это тем, что основания трапеции и треугольника остаются неизменными, высоты хоть и изменяются, но равны друг другу по свойству трапеции.

Итак, площади многоугольников равны при условии $BC + AL = DL$. Откуда $8 + AL = 16 - AL$, $2AL = 16 - 8$, $AL = 4$.

Вернемся к задаче 4А и построим два чертежа, удовлетворяющих условию задачи: 1 вариант — $CD = 4\sqrt{7}$, 2 вариант — $AB = 4\sqrt{7}$. Заметим, что $\left(4\sqrt{7}\right)^2 = 112 = 121 - 9 = 11^2 - 3^2$.

		11. Через точку D проводим перпендикуляр к стороне CD. 12. Строим окружности: • с центром в точке D и радиусом 3, • с центром в точке E и радиусом 11. 13. Строим отрезок C_1D. Его длина — $4\sqrt{7}$.
		14. Проводим окружность с центром в точке A и радиусом, равным длине отрезка C_1D. 15. Двигая точку C по лучу DC, получаем два варианта трапеции: AB_1CD и ABC_1D.

На *рисунке 123* представлены два альтернативных чертежа к условию задачи 6А

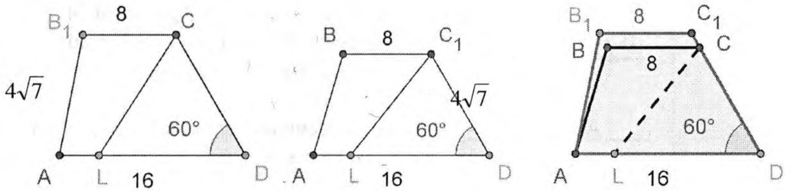


Рис. 123

Способ нахождения длины отрезка CL в первом случае заключается в дополнительном построении — переносе стороны AB_1 на вектор B_1C, вычислении по теореме косинусов стороны CD и определении вида треугольника CDL, во втором дополнительного построения не требуется.

Решению многовариантных планиметрических задач необходимо уделять внимание с самых первых тем изучения геометрии, где можно использовать не очень сложные задачи. Приведем примеры многовариантных задач по теме «Начальные геометрические сведения», решение которых целесообразно сопровождать построением динамической модели к условию задачи в ИГС на чертежной плоскости с координатной сеткой или с отображением на чертеже значений длин отрезков.

1. Взаимное расположение двух точек на прямой

1.1. На чертежной плоскости с координатной сеткой построй прямую AB. Отметь на этой прямой точку C. Передвинь точку C вдоль прямой AB так, чтобы $AC = 2$ ед. Сколько существует вариантов такого расположения точки C на прямой AB?

1.2. Построй динамическую модель к условию задачи: «Две точки движутся по прямой. На какую величину переместится середина отрезка, определяемая этими точками, если одна точка переместится на 1 ед., а другая — на 3ед?» Реши ее.

2. Взаимное расположение трех точек на прямой

2.1. Построй прямую AB и отметь на ней точку C. Передвигая точку C вдоль прямой AB найди все варианты расположения точки C относительно точек A и B.

2.2. Передвинь точку C вдоль прямой AB так, чтобы $AC = 6$ ед., $CB = 14$ ед. Сколько существует вариантов такого расположения точки C? Чему будет равно расстояние AB в каждом случае?

2.3. На прямой отмечены точки A и B. Сколькими способами можно отметить на прямой точку C так, чтобы один из трех отрезков AC, BC, AB был вдвое больше какого-либо из двух других? Рассмотри все варианты и для каждого найди длину AC, если $AB = 6$ ед.

2.4. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Найди отношение отрезка AB к BC, если $\frac{AC}{BC} = 2$.

2.5. Точки A, B и C лежат на одной прямой. $\frac{BC}{AB} = \frac{2}{3}$. Чему равно отношение AB к AC?

2.6. На одной прямой отмечены три точки A, B и C. D и E — середины отрезков AC и BC. Найдите расстояние между серединами этих отрезков, если $CA = 12$ ед, $CB = 9$ ед. Рассмотрите все случаи.

2.7. Расстояние между точками A и B равно 4. Пусть C — любая точка прямой AB. D и E — середины отрезков AC и BC. Найди все возможные значения расстояния между точками D и E.

2.8. Решите предыдущую задачу для $AB = a$.

3. Взаимное расположение четырех точек на прямой

3.1. Построй динамическую модель к условию задачи: «На прямой расположены точки A, B, C и D. Найди длину отрезка с концами в серединах AB и CD, если $AC = 5$, $BD = 7$». Сколько существует возможных вариантов расположения точек? Сколько решений имеет задача?

3.2. Длина отрезка AB равна 4. На прямой взяты точки C и D так, что $AC : CD : DB = 1 : 2 : 3$. Найди длину отрезка CD.

3.3. Точки A, B, C и D лежат на одной прямой. $AB = 3$, $AC = 5$, $CD = 1$. Чему равно расстояние между серединами отрезков AD и BC?

3.4. Точки A, B, C и D лежат на одной прямой. Отрезок AB равен 8, отрезок CD равен 3, а расстояние между их серединами равно 6. Чему может быть равна длина отрезка AD?

3.5. Использование интерактивной геометрической среды при обучении решению геометрических задач с параметрами

Задачи с параметрами составляют хоть и небольшую, но заметную часть задачного материала школьных учебников геометрии. Их доля в задачном материале представлена на *диаграмме 1*.

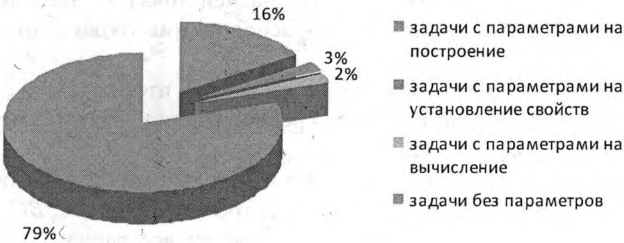


Диаграмма 1

Ярким примером геометрической задачи с параметрами является теорема о взаимном расположении окружности и прямой (8 класс), а также задачи на построение треугольника по трем сторонам и по стороне и двум прилежащим к ней углам (7 класс). Легко обнаруживаемыми признаками таких задач являются следующие:

• наличие в их условии буквенно-заданной или неопределенно-заданной геометрической величины;

• включение в требование задачи вопросов на установление количества возможных решений, на выделение условий, на выяснение характера зависимости.

Задача 1. Периметр равнобедренного треугольника равен P, одна из его сторон равна a. Найдите вторую сторону треугольника.

- Сколько решений имеет задача?
- Зависит ли и как количество решений от значения параметра a?

Задача 2. Найти углы равнобедренного треугольника, если биссектриса угла при его основании пересекает боковую сторону под углом α. При каких значениях α задача имеет два решения?

Задача 3. Постройте треугольник, если заданы его сторона a, прилежащий к ней угол φ и разность d двух других сторон

Рассмотрим на примере этих задач особенности использования интерактивной геометрической среды при решении геометрических задач с параметрами.

Компьютерное и аналитическое решения первой из представленных здесь задач равноправны и независимы.

Решение задачи 1 (аналитическое)

1. Пусть a – длина основания равнобедренного треугольника, тогда длины его боковых сторон равны $\dfrac{P-a}{2}$ (*рис. 124*). Для существования треугольника с этими сторонами должна выполняться система неравенств:

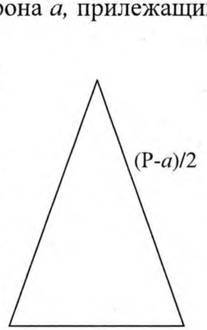


Рис. 124

$$\begin{cases}\dfrac{P-a}{2}<\dfrac{P-a}{2}+a,\\ a<P-a.\end{cases}\Leftrightarrow 0<a<\frac{P}{a}$$

2. Пусть a – длина боковой стороны равнобедренного треугольника, тогда длина его основания равна $P-2a$ (*рис. 125*).

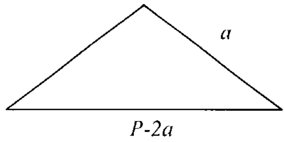
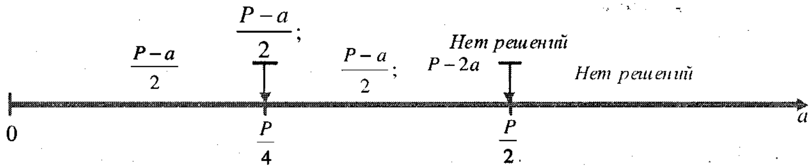


Рис. 125

$$\begin{cases}a<a+P-2a,\\ P-2a<2a.\end{cases}\Leftrightarrow \frac{P}{4}<a<\frac{P}{2}$$

Ответ:



Решение задачи 1 (компьютерное)

Построение динамического чертежа:

1. Построить отрезок длины P (произвольной).

2. Задать ползунок – параметр a с областью значений от 0 до $P/2$ (нижняя граница определяется смыслом понятия «длина», верхняя условием существования треугольника с заданным периметром и стороной следующем из неравенства треугольника, можно задать верхнюю границу и произвольно, лишь бы заданное значение не было меньше $P/2$).

3. Пусть a – длина основания равнобедренного треугольника.

3.1. Для построения основания треугольника надо построить окружность с центром в одном из концов отрезка длины P и радиусом а. Отметить точку пересечения этой окружности с отрезком длины P.

3.2. На оставшемся отрезке отметить середину.

3.3. Для того чтобы зафиксировать длину боковой стороны надо провести отрезок, соединяющий середину с другим концом отрезка Р.

3.4. Построить две окружности с центрами в концах основания и радиусом, равным длине боковой стороны.

3.5. Отметить точки пересечения этих окружностей.

3.6. Построить треугольник с вершинами в концах основания и одной из точек пересечения окружностей.

3.7. Все объекты, кроме треугольника и отрезка, изображающего периметр спрятать.

4. Пусть a – длина боковой стороны равнобедренного треугольника.

4.1. Для построения второго чертежа отложить новый отрезок длины, равной P.

4.2. Для того, чтобы отложить на отрезке длины P отложить основание треугольника надо провести окружность с центром в одном из его концов и радиусом P-$2a$ (или от другого конца отрезка окружность с радиусом $2a$). Отметить точку пересечения окружности и отрезка.

4.3. Далее повторить все построения, описанные в шагах 3.2 – 3.7. (*рис. 126*).

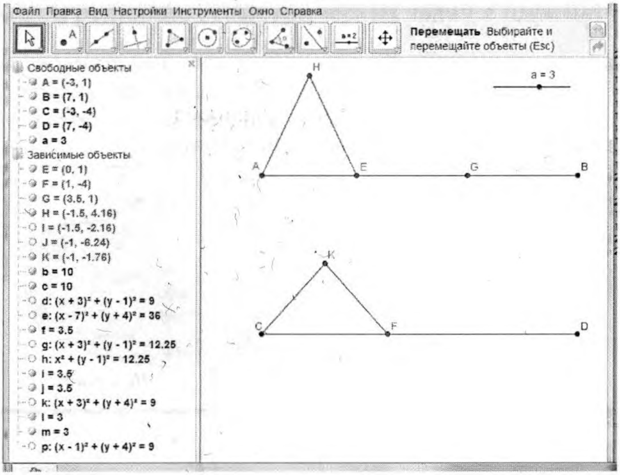


Рис. 126

Ход эксперимента:

Задаем изменение значений параметра a от наименьшего значения к наибольшему. Следим за изменением/сохранением существования построенных треугольников. На отрезке длиной P отмечаем точки, в которых или при переходе через которые меняется количество треугольников (контрольные значения параметра a выраженные через P). Проверим наблюдения делением отрезка P на части серединами отрезков.

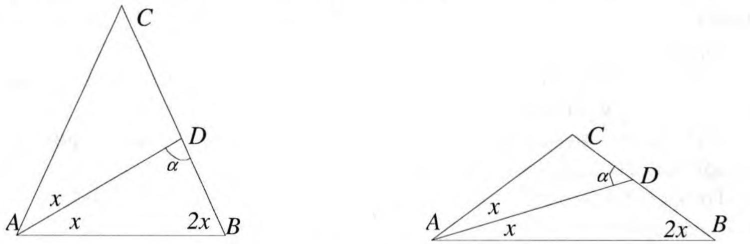
Вывод. Контрольными значениями параметра являются $a = 0$ (в этой точке исчезают оба треугольника), $a = \dfrac{P}{4}$ (при переходе за эту точку появляется второй треугольник), $a = \dfrac{P}{2}$ (в этой точке исчезают оба треугольника).

Задачи, компьютерное решение которых может быть получено независимо от аналитического могут быть использованы на первых этапах обучения решению задач с параметрами, так как делают наглядным зависимость результата решения задачи от значения параметра (или от соотношения значений параметров), позволяют раскрыть смысл понятий: «параметр», «контрольное значение параметра», «результат решения задачи с параметром».

Особенностью второй задачи является то, что ее компьютерное решение не может быть найдено без предварительного выполнения двух первых шагов аналитического решения.

Решение задачи 2 (аналитическое).

Так как углом между пересекающимися прямыми является наименьший из образованных ими углов, то заданный условием задачи угол α, в зависимости от величины может быть образован как биссектрисой и лучом, проходящим, через вершину треугольника (*рис. 127а*), так и биссектрисой и лучом, проходящим через конец основания треугольника (*рис. 127б*).



а *б*

Рис. 127

1. Рассмотрим случай, представленный на *рисунке 127а*.

Обозначим за x величину половины угла при основании равнобедренного треугольника ABC. Тогда из треугольника ADB (рис.2а) $x+\alpha+2x=180^\circ$. Получаем $x=60^\circ-\dfrac{\alpha}{3}$.

Выразим через x величины углов треугольника ABC. $\angle A=\angle B=2x=120^\circ-\dfrac{2\alpha}{3}$, $\angle C=180^\circ-4x=\dfrac{4\alpha}{3}-60^\circ$.

Так как по свойству равнобедренного треугольника $\angle B<90^\circ$, то треугольник с такими углами существует, если справедливо неравенство: $120^\circ-\dfrac{2\alpha}{3}<90^\circ$, т.е. при $\alpha>45^\circ$.

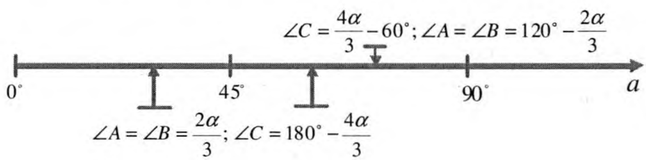
2. Рассмотрим случай, представленный на *рисунке 127б*.

Из треугольника ADB, при тех же обозначениях, находим: $x+(180^\circ-\alpha)+2x=180^\circ$. Откуда получаем, что $x=\dfrac{\alpha}{3}$.

Выразим через x величины углов треугольника ABC: $\angle A=\angle B=2x=\dfrac{2\alpha}{3}$, $\angle C=180^\circ-4x=180^\circ-\dfrac{4\alpha}{3}$.

Так как по свойству равнобедренного треугольника $\angle B<90^\circ$, то треугольник с такими углами существует, если справедливо неравенство: $\dfrac{2\alpha}{3}<90^\circ$, т.е. при $\alpha<135^\circ$, следовательно, при всех допустимых значениях α.

Ответ:



Решение задачи 2 (компьютерное).

Построение динамического чертежа:

1. Задать ползунок - параметра α - величина угла с область допустимых значений от 0° до 90°.

2. Построить вспомогательный треугольник ADB по стороне AB (произвольно выбранной длины) и прилежащим к ней углам, величины которых выражены через α (см. аналитическое решение шаги 1.2 и 2.2).

3. Для построения угла CAD построить точку B' – симметрично относительно прямой AD. Провести луч AB'.

4. Точка C получается как точка пересечения лучей AB' и BD.

Ход эксперимента

Зададим изменение значения параметра от 0° до 90°. Следим за существованием построенных треугольников. Отмечаем значения контрольные параметра, т.е. значения в которых или при переходе через которые меняется количество треугольников.

Вывод: контрольными значениями параметра являются:

0° – отсутствуют оба треугольника, после перехода появляется треугольник, изображенный на *рисунке 127б*;

45° – после перехода существуют оба треугольника;

90° – треугольники равны.

Задачи, которые не могут быть решены компьютерно, без использования аналитических выкладок полезны на этапе мотивации перехода от компьютерного к аналитическому решению, а также на первых этапах обучения аналитическому решению.

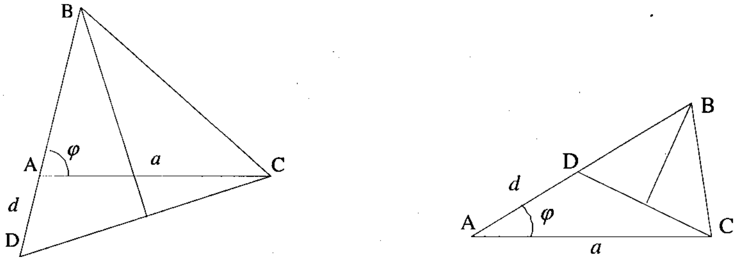
Рассмотрим задачу 3. Компьютерное решение данной задачи не позволяет обнаружить контрольные соотношения параметров, однако полезно на этапе его поиска.

Решение задачи *3* (компьютерно-аналитическое).

Построение

Циркулем и линейкой	Инструментами ИГС
–	Зададим 3 ползунка - параметры: a – длина стороны треугольника; d - разность двух других сторон с наименьшими значениями 0 и произвольно выбранным наибольшим значением; φ – угол прилежащий к заданной стороне с областью значение от 0° до 180°.
Построение вспомогательных треугольников	
1. Отложим с помощью линейки 2 отрезка фиксированной длины a.	Отложить 2 отрезка заданной длины a.
2. С помощью циркуля построим угол, прилежащий к каждому отрезку равный углу φ.	Отложить от каждого из них по углу заданной величины φ.

3.1. В первом случае будем считать, что сторона треугольника, противолежащая углу длиннее, тогда на продолжении второй стороны угла отложим отрезок d. Соединим вершины построенного треугольника. 3.2. Во втором случае будем считать, что сторона треугольника, прилежащая углу длиннее, тогда отложим отрезок d на стороне угла. Соединим вершины построенного треугольника.	Проведем прямую, проходящую через построенную сторону угла. Отложим на луче, дополнительном к стороне угла отрезок заданной длины d. Построим треугольник 1 с вершинами в полученных точках. Построим отрезок заданной длины d на построенной стороне угла. Построим треугольник 2 с вершинами, в полученных точках.
Построение искомого треугольника	
4. Построим с помощью циркуля и линейки серединные перпендикуляры к третьей стороне каждого из вспомогательных треугольников.	Построим серединный перпендикуляр к отрезку - третьей стороне вспомогательного треугольника.
5. Недостающая вершина искомых треугольников получается как точка пересечения серединного перпендикуляра с прямой, содержащей отрезок d (*рис. 128а* и *рис. 128б*).	Отметить точку пересечения серединного перпендикуляра с прямой, содержащей отрезок d. Построить треугольники 3 и 4 с вершинами в построенной точке пересечения, и в концах отрезка длины a.



а *б*

Рис. 128

Ход компьютерного эксперимента

Зададим изменение одного параметра при фиксированных значениях остальных, для того, чтобы выявить условия существования каждого из построенных треугольников (*рис. 129*).

Выводы: условием существования каждого из треугольников является наличие точки пересечения серединного перпендикуляра и прямой, содержащей отрезок длиной d. Контрольные значения представляют собой определенную комбинацию значений всех трех параметров. В качестве вспомогательного параметра можно использовать величину угла *ADC* (*рис. 128*). Контрольным его значением является 90°. Треугольник, изображенный на *рисунке 128а* существует при $\angle ADC < 90^\circ$. Треугольник, изображенный на *рисунке 128б* существует при $\angle ADC > 90^\circ$.

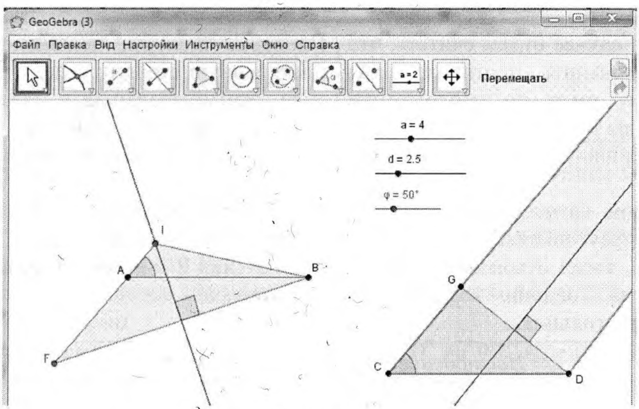


Рис. 129

Аналитическое исследование результата

1. Выразим обнаруженное условие существования треугольника на *рисунке 128а* через значения заданных параметров. Для этого рассмотрим треугольник ADC (*рис. 128а*). По теореме косинусов $DC = \sqrt{d^2 + a^2 - 2ad\cos(180° - \varphi)}$. Тогда условие существования треугольника 3 будет иметь вид:

$$\cos\angle ADC = \frac{2d^2 - 2ad\cos(180° - \varphi)}{2d\sqrt{d^2 + a^2 - 2ad\cos(180° - \varphi)}} > 0$$

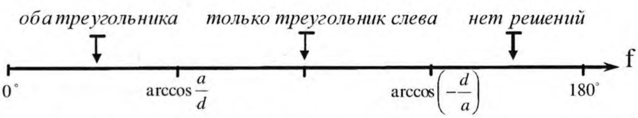
Упрощая данное неравенство, получаем: $\cos\varphi > -\dfrac{d}{a}$.

2. Рассмотрим треугольник ADC (*рис. 128б*). Аналогично получаем условие существования треугольника 4 в виде неравенства:

$$\cos\angle ADC = \frac{2a^2 - 2ad\cos\varphi}{2a\sqrt{d^2 + a^2 - 2ad\cos\varphi}} < 0$$

Упрощая неравенство, получаем $\cos\varphi > \dfrac{a}{d}$.

Ответ:



Решение подобных задач требует сформированных представлений о возможностях и ограничениях компьютерного и аналитического решения задач с параметрами, умений рационально использовать возможности, предоставляемые каждым из методов.

Все представленные типы задач является необходимой основой обучения решению геометрических задач с параметрами. Методическая схема может быть представлена следующими основными этапами.

Этап 1. Обучение проведению компьютерного эксперимента на готовом динамическом чертеже с записью данных в готовый шаблон таблицы.

Пример 1. Отрезки CD и $C'D$ являются отрезками касательных к окружности с центром в точке A, проведенных из точки D. Проведите компьютерный эксперимент на динамическом чертеже (*рис. 130*), чтобы установить при каких значениях угла CDC' середина отрезка AD лежит а) на окружности; б) вне круга; в) внутри круга. Результаты эксперимента занесите в таблицу:

Область значений параметра	$(0^\circ;\dots)$	…	$(\dots;180^\circ)$
Отношение DF и FA			

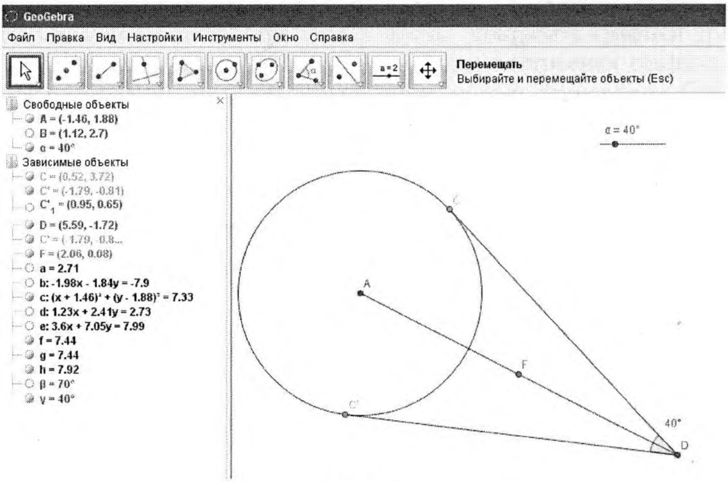


Рис. 130

На этом этапе должны быть использованы задачи, допускающие компьютерное решение без обращения к аналитическому. При работе с такими задачами следует обращать особое внимание учащихся на признаки контрольных значений параметра, на особенности записи результатов решения задач на исследование относительно параметра.

Этап 2. Обучение планированию компьютерного эксперимента.

Для достижения цели этапа учащимся вновь должны быть предложены задачи, допускающие компьютерное решение (аналитические выкладки могут привлекаться лишь для уточнения результата). Главным отличием от предыдущего этапа является постановка перед учащимися дополнительных заданий:

- на построение динамического чертежа;
- на составление шаблона таблицы экспериментальных данных.

Пример 2. Дан квадрат $ABEC$, сторона которого равна a, и окружность с центром в точке B радиуса 5см. С помощью компьютерного эксперимента установите, сколько точек пересечения с окружность могут иметь прямые, содержащие стороны квадрата при различных значениях a?

Построение динамического чертежа к задаче (*рис. 131*) требует анализа ее условия с целью определения параметра, области его допустимых значений, зависящих от параметра величин. Составление шаблона таблицы экспериментальных данных требует от учащихся умения определить цель эксперимента, а также провести поисковый (предварительный) эксперимент, выявляющий количество контрольных значений. Результатом этих действий в рассматриваемом примере будет следующая таблица:

Длина стороны квадрата	(0;…)	…	(…, …)	…	(…, +∞)
Количество точек пересечения прямых с окружностью					

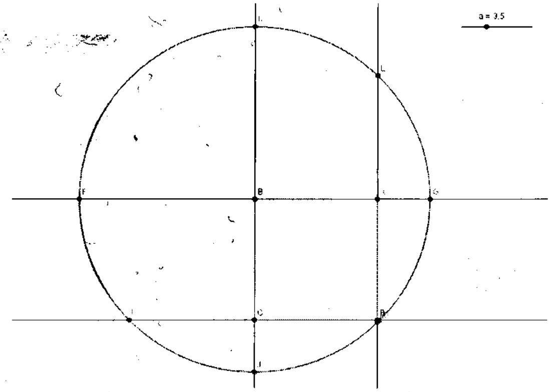


Рис. 131

Этап 3. Обучение аналитическому обоснованию результатов компьютерного эксперимента.

Мотивационной основой перехода к третьему этапу является обнаружение ограниченности компьютерного решения (в примере 2 – невозможности точного определения одного контрольных значений параметра). Для этой цели также могут быть использованы задачи, компьютерное решение которых возможно лишь на базе аналитического (см. задача 2).

Для реализации данного этапа желательно использовать задачи компьютерно решенные на предыдущих этапах. Это позволит сконцентрировать внимание учащихся на аналитическом обосновании результата, минуя этап анализа условия задачи. С целью включения учащихся в деятельность сравнительного анализа процесса решения задачи с параметром и частной геометрической задачи полезно дополнить каждую из них серией частных задач, полученных фиксацией значений параметра на каждом из промежутков, образованных контрольными значениями.

Этап 4. Обучение компьютерно-аналитическому решению.

К этому этапу целесообразно приступать, когда учащимися освоены в достаточной мере компьютерное и аналитическое решения. Для реализации этого этапа необходимо подбирать геометрические задачи с несколькими параметрами, установление контрольных значений между которыми требует введения вспомогательного параметра (см. задача 3).

Здесь также могут быть использованы алгебраические задачи с параметрами, для решения которых необходимо обращение к геометрической интерпретации алгебраических соотношений.

Пример 3. Найти все положительные значения a, при каждом из которых система:

$$\begin{cases} (|x|-6)^2+(y-12)^2=4, \\ (x-1)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Для компьютерного решения данной задачи необходимо задать ползунок – параметр a, а затем, используя строку ввода, построить графики уравнений, входящих в систему (*рис. 132*). Заметим, что для построения графика первого уравнения необходимо предварительно снять модуль (программа Geogebra не допускает неявное задание зависимостей, график которых распадается на несколько фигур). Кроме того, компьютерный эксперимент не позволяет найти результат, выраженный иррациональным числом ($\sqrt{193}+2$).

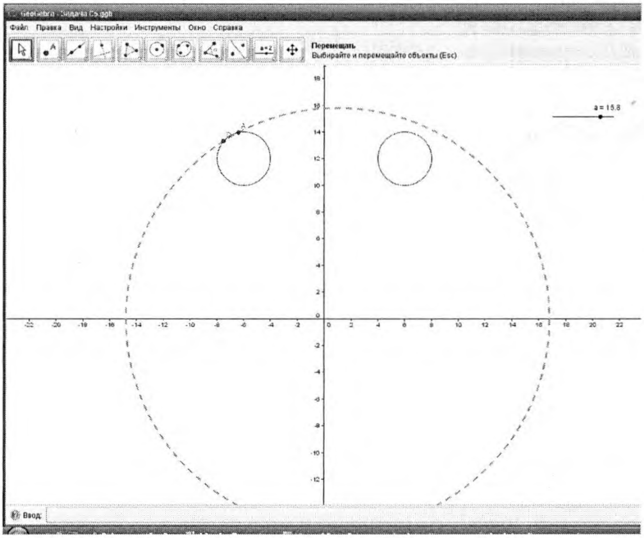
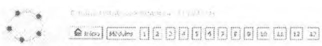


Рис. 132

Приложения

Аннотированный список ресурсов Интернет по теме «Обучение геометрии с использованием среды GeoGebra»

Логотип, название ресурса, размещение	Аннотация
GeoGebra Официальный сайт программы **http://www.geogebra.org/cms/**	Основные разделы сайта: информация, загрузка, помощь, обменник. В разделе *GeoGebraHelp* можно прочитать (скачать) краткое руководство, видео по работе с программой, помощь (на английском языке). Каждый может бесплатно использовать чужие и загружать свои материалы. Открылся новый раздел *GeoGebraMaterials* **http://www.geogebratube.org/** — поиск интерактивных учебных материалов
Учебники GeoGebra	
Learn and Use GeoGebra Изучайте и используйте GeoGebra **http://math247.pbworks.com/w/page/20517545/Learn-and-Use-GeoGebra**	Уроки доктора Линды Fahlberg-Stojanovska. Помощь по использованию GeoGebra: 14 уроков по работе в GeoGebra в форматах *.pdf, *.ggb видеоформате: от построения параллелограмма до анимации. Файлы *.pdf, *.ggb можно скачать.
 Игровая математика **http://mathamort.e-monsite.com**	Сайт на французском языке содержит учебник (pdf – файлы на французском): установка, инструменты, примеры, создание инструментов. На сайте много разных апплетов, большинство из которых можно скачать (*.ggb) или посмотреть он-лайн (*.html). Апплеты: игры и головоломки, доказательство теорем и формул, инструменты для геометрических преобразований, оптические иллюзии, анимации
 Обучение математике с GeoGebra **http://geogebra.es/cvg/index.html**	Учебник на испанском языке по работе в GeoGebra с удобным интерфейсом: 13 модулей от интерфейса программы до создания апплетов. Содержит поэтапные объяснения для построения различных математических объектов (построение геометрических фигур, графиков, трехмерных объектов). Двойной щелчок на апплет открывает программу GeoGebra в новом окне и можно сохранить файл в формате *.ggb на своем компьютере
Сайт университета Pravia **http://www.iespravia.com/rafa/rafa_geogebra.htm** Автор — Рафаэль Лосада	Сайт на испанском языке. Автор - профессор кафедры математики КЭС-де-Pravia Рафаэль Лосада. Некоторые ссылки открывают страницы предыдущего учебника, но есть различия в содержании. Файлы скачиваются так же, как с предыдущего сайта

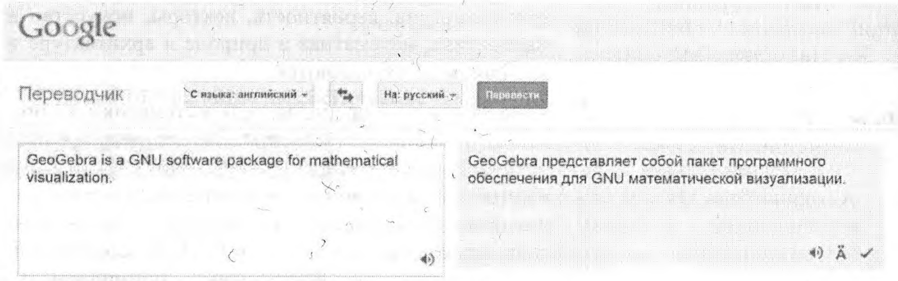
Учебник GeoGebra **http://webspace.ship.edu/msrenault** Автор — Марк Renault	На своих личных страничках, расположенных на сайте Shippensburg University, Марк Renault разместил в форме учебника 9 уроков по работе в GeoGebra. Идея уроков — быстро познакомить читателей с основными возможностями GeoGebra, от простых до более сложных (на английском языке)
Математика и мультимедиа **http://mathandmultimedia.com** Автор — Гильермо Баутиста	На сайте во вкладке GeoGebra — учебник Гильермо Баутисты (Филиппины) из серии «Шаг за шагом». Учебник представляет собой набор более 50 тем от начинающего до продвинутого уровня. Целью серии является научить, как использовать GeoGebra в обучении математике (на английском языке)
Обучающие видеоролики	
Библиотека **http://www.screencast.com/users/LFS**	Видеоролики на английском языке, содержащие начальные сведения по GeoGebra, советы для начинающих, уроки
Видеосообщество **http://www.youtube.com**	Здесь можно просмотреть огромное число видеороликов на английском и испанских языках по работе в среде GeoGebra, раскрывающие возможности среды. Перейти от одного ролика к другому можно после просмотра видео в появившемся меню или в списке справа
Сайты институтов GeoGebra	
Институт GeoGebra в Харькове **http://kafinfo.org.ua/geogebra**	Начал свою работу **институт GeoGebra в городе Харьков**. Институт GeoGebra Харьков, Украина основан 6 июля 2010 на базе кафедры информатики Харьковского национального педагогического университета имени Г.С. Сковороды. Он является составной частью Международного института GeoGebra (IGI, **http://www.geogebra.org/igi**) и полностью разделяет его цели и задачи. Методических материалов представлено мало (на украинском языке)
Институт GeoGebra в Огайо **http://ggbmidwest.com**	Сайт института GeoGebra в Северной Америке. Сайт новый. Материалов пока нет
Рекламные сайты	
Компьютерные программы по математике	На сайте можно найти бесплатные русские версии программ, ориентированных на использование в учебном процессе, методические разработки, модели позволяющие узнать о возможностях компью-

http://www.pcmath.ru/?parent=16 &page=35 Автор — Анатолий Корянов, г. Брянск	терных программ. Здесь можно скачайть файл, содержащий программу GeoGebra, модели, созданные с помощью программы (*Сумма углов треугольника, Смежные углы, Теорема Пифагора, Лестница и стена, Уравнение окружности, Уравнение прямой, Прямоугольный параллелепипед, Угловой коэффициент касательной*), деморолики (*Уравнение окружности, Сумма углов треугольника*)
Сайты, содержащие дидактические и методические материалы GeoGebra	
signum Сетевое сообщество учителей математики и информатики Эстонии Сетевое сообщество учителей математики и информатики Эстонии **http://conjunctio.blogspot.com/2009/08/geogebra_27.html**	На данном русскоязычном сайте находятся Апплеты программы GeoGebra. В каждом апплете Вы найдёте рекомендации по его использованию, предназначенные для учащихся, а также дополнительные вопросы, на которые ученик должен найти ответ. Апплеты составлены на основе упражнений учебника 11 класса авторов К. Вельскер, Л. Лепманн, Т. Лепманн для школ Эстонии. В группе Signum (щелкнуть на квадрат) имеются презентации, которые можно смотреть, но только в сети
КОПИЛКА Блог учителя математики М.А. Метс «Копилка» **http://marinmets.blogspot.com**	Большое количество ссылок на примеры готовых авторских разработок для интерактивной доски, моделей с заданиями, выполненных в программе *GeoGebra* и апплетов на русском и эстонском языках. Методические разработки для 5–12 классов, некоторые из которых можно скачать (*.ggb) или просмотреть в сети
Живая Геометрия Это моё хобби и моя работа. Автор - Иван Сергеевич Храповицкий, учитель, тел. 2151153, Беларусь Живой журнал Блог И.С. Храповицкого **http://janka-x.livejournal.com/53212.html**	В блоге можно скачать пособия по основным темам школьной математики, выполненные в ИГС «Живая геометрия», в режиме on-line просмотреть Справочников (*Функции, Четырёхугольники, Уравнения с целыми корнями*), динамические модели по алгебре (*касательная и производная, задачи с параметрами* и др.) и геометрии (*Теорема Пифагора, сумма углов треугольника, теоремы синусов и косинусов, подобие, площадь описанного многоугольника, круга* и др.,), тесты (*по планиметрии, на уровень понимания, для абитуриента*) в формате GeoGebra. Сайт постоянно обновляется
Geometría Dinámica Динамическая геометрия **http://geometriadinamica.es**	Испаноязычный сайт содержит апплеты, созданные в GeoGebra, по разделам: *динамическая геометрия, функции и графики, вероятность и статистика, арифметика* и *алгебра*. Двойной щелчок на апплет открывает программу GeoGebra в новом окне и можно сохранить файл в формате *.ggb на своем компьютере

LES MATHEMATIQUES Личный сайт Даниеля Ментрарда Преподавание математики на всех уровнях **http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Maths/accueilmath.htm**	Около 5000 очень качественных апплетов GeoGebra на французском языке: упражнения, анимации, модели по математике и физике для всех уровней образования. Все апплеты структурированы по темам: элементарные, арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, вероятность, векторы, искусство и математика, математика в природе и архитектуре и др. Файлы не скачиваются
Dave Matthews' GeoGebra Pages **http://notropis.net/geogebra/index.html** Автор — Дэйв Мэтьюз	Дэйв Мэтьюз — преподаватель математики в Миннесота с 20-летним опытом, зарегистрированным руководителем мастерской GeoGebra. На сайте находится более 50 апплетов по алгебре, тригонометрии, которые автор сайта использует на своих занятиях, видеоуроки по работе в GeoGebra, математические курсы со встроенными примерами из GeoGebra. Файлы скачиваются так же, как с предыдущего сайта
Сайт Saint Louis University **http://www.slu.edu/classes/maymk/GeoGebra**	Банк страниц с апплетами GeoGebra и заданиями для визуализации обучения студентов алгебре и геометрии. Скачать файлы нельзя
HCPS Геометрические исследования с GeoGebra **http://teachers.henrico.k12.va.us/math/GeoGebra_Site/**	Сайт школы HCPS. Апплеты на английском языке с исследовательскими заданиями по различным темам школьной геометрии: *площади четырехугольников, многоугольники, теорема Пифагора, преобразования плоскости.* Скачать файлы нельзя
slideshare Презентации и документы **http://www.slideshare.net/tag/geogebra**	На сайте представлены презентации по GeoGebra на разных языках: английский, испанский, украинский. Их можно просмотреть, а зарегистрированным пользователям — загрузить на свой компьютер
Гимназия развивающего образования Сайт гимназии № 42 г. Кемерово **http://school.g42.ru/pages/proekt-0.aspx**	На сайте можно ознакомиться с концепцией проекта «Живая геометрия» с использованием ИГС Живая геометрия и GeoGebra, конспекты уроков «Свойства биссектрис и серединных перпендикуляров в треугольнике», «Освоение доказательства теоремы о накрест лежащих углах при параллельных прямых»
GeoGebra lehed Математическая школа **http://web.zone.ee/math/geogebra.html**	Этот эстонский сайт содержит ссылки на апплеты GeoGebra по 5–11 классам: *измерение углов, сумма углов, график квадратичной функции, площади, треугольники, векторы, тригонометрия, алгебра.* Много ссылок на апплеты Даниеля Ментрарда, которые не скачиваются

Перевод

Для перевода материалов не русскоязычных файлов можно воспользоваться переводчиком Google http://translate.google.com. Скопируйте текст, который хотите перевести и вставьте в белое окно. Справа, в сером, через несколько секунд появится текст перевода.



Настройка автоматического перевода в браузере

Чтобы осуществлять автоматический перевод содержания всей страницы сайта, лучше воспользоваться браузером Google Chrome, который можно скачать бесплатно по адресу http://www.google.ru/chrome?hl=ru&brand=CHMI

Настройка автоматического перевода производится следующим образом:

1. Нажмите на значок гаечного ключа  на панели инструментов браузера.
2. Выберите Параметры (Настройки на Mac и Linux, Настройки на Chrome OS).
3. Перейдите на вкладку Расширенные.
4. Используйте флажок "Предлагать перевод страниц, если я не владею языком, на котором они написаны", чтобы включить или отключить эту функцию.

Конспекты уроков геометрии с использованием GeoGebra

В.И. Пирогова
МОУ «СОШ № 51» г. Архангельска

Построение треугольника по трем элементам

Цель урока: формирование умений решать задачи на построение треугольника, сводящиеся к базовым задачам, с помощью циркуля и линейки и с использованием инструментов GeoGebra; формирование представлений учащихся о дополнительных возможностях построения, предоставляемых GeoGebra.

Оборудование: циркуль, линейка, учебник [2], GeoGebra.

Место проведения урока: компьютерный класс.

План урока:

Этап урока	Форма организации	Время
1. Организационный момент	Фронтальная работа без ИГС	2 мин.
2. Актуализация опорных знаний	Фронтальная работа с ИГС	5 мин.
3. Ознакомление с особенностями решения задач на построение в ИГС	Парная работа с ИГС в демонстрационном режиме	10 мин.
4. Самостоятельная работа с последующей взаимопроверкой	Парная работа с частичным разделением заданий в паре (с ИГС/без ИГС)	25 мин.
5. Итоги урока, постановка домашнего задания	Фронтальная работа без ИГС	3 мин.

Ход урока:

1. Организационный момент.

Геометрические задачи на построение, возможно, самые древние математические задачи. Кому-то они сейчас могут показаться не очень интересными и нужными, какими-то надуманными. И в самом деле, где и зачем может понадобиться умение с помощью циркуля и линейки построить правильный многоугольник или треугольник по трем высотам, или даже просто сделать построение параллельной прямой?

Сегодня на уроке мы с вами убедимся в том, что освоенные нами правила решения задач на построение треугольников с помощью циркуля и линейки лежат в основе более современных и сложных построений, и необходимы всякому геометру для изучения свойств геометрических фигур.

Сначала мы все вместе будем работать за компьютерами (сядьте по 2 человека за один компьютер), а затем будем работать за компьютером по сменам. В конце урока мы обменяемся впечатлениями.

2. Актуализация опорных знаний.

Какие основные задачи на построение треугольников циркулем и линейкой вам известны? (после получения правильного ответа учитель ставит флажок в соответствующем окне динамического текста, выполненного в GeoGebra) (*рис.133*).

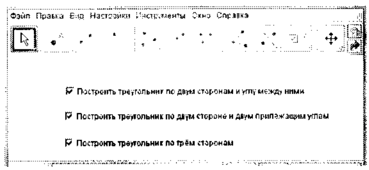


Рис. 133

Какие еще основные задачи на построение циркулем и линейкой вам известны? Давайте посмотрим, имеются ли в GeoGebra инструменты сходные по своим возможностям с циркулем и линейкой. Назовите их.

Для каких основных задач на построение циркулем и линейкой в GeoGebra имеются готовые инструменты (*рис. 134*)?

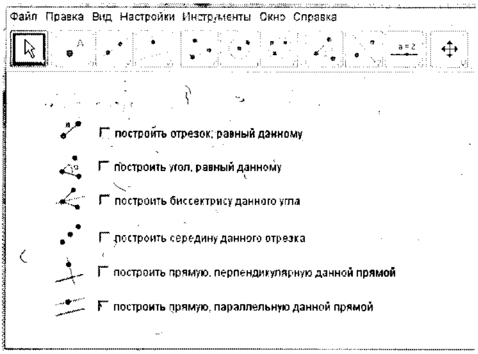


Рис. 134

3. Ознакомление с особенностями решения задач на построение в ИГС.

Эти специальные инструменты значительно упрощают решение задач на построение треугольников, даже тех, которые нельзя отнести к основным.

Давайте решим вместе задачу: «Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведённой к одной из этих сторон».

Я буду выполнять построения за своим компьютером, а вы следите за моими действиями и повторяйте их.

План построения чертежа в программе GeoGebra:

1) Задайте длины двух сторон треугольника *AB* и *CD* и высоты *EF* (высота должна быть меньше сторон треугольника) с помощью кнопки , в левом верхнем углу рисовальной плоскости.

2) Отметьте на рисовальной плоскости точку с помощью кнопки , например, точку *G*.

3) Отложите отрезок, равный одному из данных отрезков, с помощью инструмента (в открывшемся диалоговом окне наберите имя отрезка, например, *a*) – получен отрезок *GH*.

4) Постройте прямую, перпендикулярную отрезку *GH*, проходящую через точку G с помощью кнопки - прямая *e*.

5) Отложите на прямой *e* отрезок, равный высоте треугольника с помощью инструмента .

6) Отметьте точки пересечения окружности с прямой е с помощью инструмента - точки *J* и *I*.

7) Проведите через одну из этих точек, например точку *J*, прямую, параллельную *GH*, с помощью инструмента - прямая *g*.

8) Постройте еще одну окружность с центром в точке H и радиусом, равным второй стороне треугольника, например b, с помощью инструмента

9) Отметьте точки пересечения построенной окружности и прямой g с помощью инструмента – точки K и L.

10) Постройте треугольники с вершинами в точках GKH и GLH с помощью инструмента (*рис. 135*).

Они и являются искомыми, так как имеют две стороны, равные заданным отрезкам и высоту, проведенной из них, равную данной.

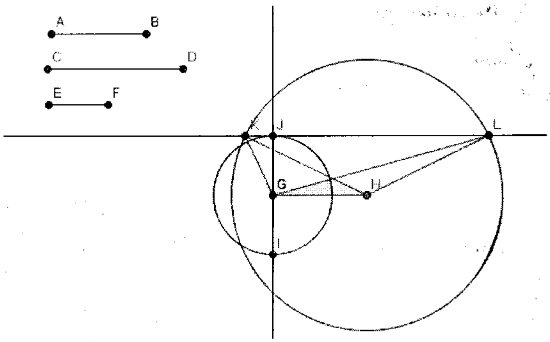


Рис. 135

Достоинством построений, выполненных в ИГС, является возможность исследования условий существования построенных треугольников.

В самом начале построения я рекомендовала вам задать высоту меньшую обеих сторон треугольника. С помощью инструмента изменяйте длину высоты (перемещайте точку F). Уточните, меньше какой стороны треугольника должна быть заданная высота. Объясните, почему.

4. Самостоятельная работа по группам.

Сядьте так, чтобы за компьютерами осталось по одному человеку. Решите самостоятельно две задачи и исследуйте условия существования треугольников:

1. Постройте прямоугольный треугольник по катету и прилежащему острому углу.

2. Построить треугольник по углу, прилежащей к нему стороне и высоте, выходящей из этого угла.

Сидящие за компьютером решают в ИГС, остальные с помощью циркуля и линейки. После окончания работы расскажите друг другу решение задач. Обсудите ответы на следующие вопросы:

- С помощью каких инструментов (циркуля и линейки или инструментов ИГС) решать задачи на построение быстрее?
- При построении какими инструментами легче контролировать, чтобы все треугольники, удовлетворяющие условию задачи, были изображены?
- На каких чертежах лучше видны условия существования треугольников?

5. Итоги урока, постановка домашнего задания.

Современные технические устройства делают сами построения более простыми и быстрыми. Они позволяют получать такие чертежи, которые пригодны для дальнейшего исследования условий существования и многообразия построенных фигур.

Домашнее задание: № 295, № 315(а, б) (выполните построение циркулем и линейкой и с использованием ИГС).

М.В. Белорукова
МОУ «СОШ № 8» г. Архангельска

Решение задач по теме: «Окружность

Цель урока: Совершенствовать навыки решения задач по теме, познакомить с особенностями решения задач с параметрами (аналитически и компьютерно).

Оборудование: ПК, Geogebra, мультимедиа проект.

Место проведения: компьютерный класс.

План урока:

Этап урока	Форма организации	Время
1. Организационный момент	Фронтальная работа без ИГС	2 мин.
2. Актуализация базовых теоретических знаний	Фронтальная работа с привлечением ИГС в качестве средства демонстрационной наглядности	5 мин.
3. Формирование умений решать задачи с окружностью на применение теоретических знаний	Самостоятельная работа с последующей самопроверкой	7 мин.
4. Демонстрация особенностей решения задач с параметром с использованием возможностей ИГС	Одновременная индивидуальная работа учащихся за компьютерами под руководством учителя	9 мин.
5. Формирование умений решать задачи с параметром с привлечением компьютерного эксперимента	Одновременная индивидуальная работа учащихся за компьютерами самостоятельно с последующей взаимопроверкой	20 мин.
6. Подведение итогов урока	Фронтальная работа	2 мин.

Ход урока:

1. Организационный момент.

Эпиграф: Три пути ведут к знанию:

Путь размышления – это путь самый благородный,
Путь подражания – это путь самый лёгкий
И путь опыта – это путь самый горький.

Конфуций

Сегодня на уроке мы должны:

- систематизировать теоретические знания по теме: «Окружность»;
- закрепить навыки решения задач по данной теме;
- продолжить решение задач с параметром.

2. Актуализация базовых теоретических знаний

- Дать определение окружности

- Что такое центр, радиус, диаметр, хорда окружности?
- Дать определение круга
- Какая прямая называется касательной к окружности?
- Какая точка называется точкой касания прямой и окружности?
- Какая прямая называется секущей по отношению к окружности?
- Сформулировать теорему о свойстве касательной
- Объясните, что такое параметр?

(Использование компьютера в демонстрационном режиме)

Задача: Дана окружность с центром в точке *O* и точка *M* а) на ней; б) вне ее. Построить касательную к окружности, проходящую через точку М.

а) через точку М окружности построить касательную к этой окружности

Провести радиус *OM.* Провести прямую *a* через точку *M* так, что *a* перпендикулярна *OM* (*a* – касательная, *M* – точка касания) (*рис. 136*).

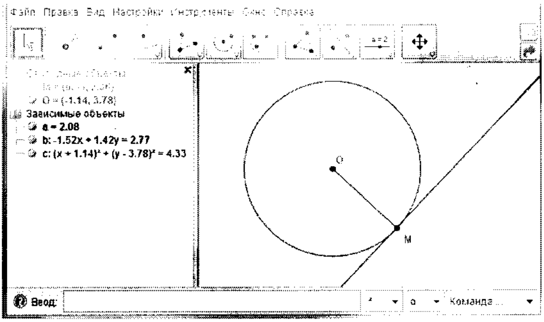


Рис.136

Возможности Geogebra допускают и другой способ построения, который не требует знания определения касательной к окружности. Для этого достаточно воспользоваться инструментом .

б) через точку М, не лежащую на окружности, построить касательную к этой окружности с использованием инструмента .

3. Формирование умений решать задачи с окружностью на применение теоретических знаний.

Самостоятельная работа. Выполняется на листочках по вариантам. Самопроверка по готовым ответам.

Вариант 1.

AB, *AC* – касательные к окружности с центром в точке *O*. $OB = 2{,}1$ см, $AO =$ 4,2 см. Найти угол *BOC*.

Вариант 2.

MB – касательная к окружности с центром в точке *O*. *MA* – хорда, равная радиусу окружности. Найти угол между касательной и хордой (угол *AMB*).

Самопроверка по готовым ответам: если ответ верный – ставите «+», если ответ неверный – ставите «-». (Работы сдают. Решение проверяет учитель. Выставляет оценку.)

Ответы к самостоятельной работе.

Вариант 1: угол ВОС равен 120º.

Вариант 2: угол АМВ равен 30º.

4. Демонстрация особенностей решения задач с параметром с использованием возможностей ИГС (Используется компьютер, программа «Geogebra»)

Мы с вами продолжаем решать геометрические задачи с параметром. Для построения чертежей используем программу …? Для дальнейшей работы на уроке нам потребуется…? (Компьютер). Рассаживаемся за компьютеры.

Задача: Отрезки *CE* и *CD* являются отрезками касательных к окружности с центром в точке *A*. При каком значении угла *BCE* середина отрезка *AC* лежит на окружности?

(Прежде чем выполнять чертёж на компьютере, в ходе устной работы с классом, проговаривается ход построения)

1. Постройте окружность с центром в произвольно выбранной точке *A*, проходящую через произвольную точку *B* с помощью инструмента ;

2. Воспользовавшись инструментом, отметьте вне окружности произвольно точку *C*.

3. Используя инструмент, проведите касательные из *C* к окружности.

4. Отметьте точки касания *D* и *E* с помощью инструмента.

5. Соедините точки *A* и *C* отрезком.

6. Найдите середину *F* отрезка *AC* с помощью инструмента.

7. Задайте точку *G* пересечения отрезка *AC* и окружности, пользуясь инструментом.

8. Сделайте видимым величину угла *DCE*, используя инструмент.

Учащиеся выполняют построение чертежа на компьютере (*рис. 137*).

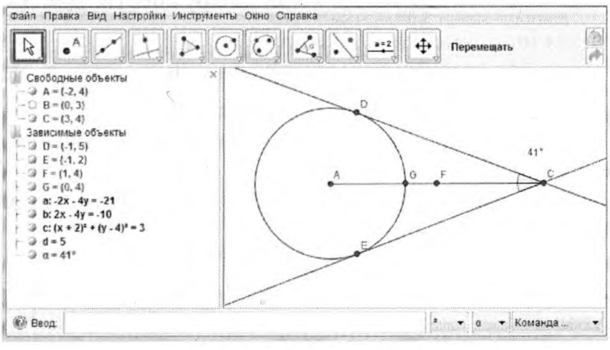


Рис. 137

Используя инструмент, найдите такое положение точки *C*, при котором точки *G* и *F* совпадут. Величина угла, которая соответствует этому положению и будет искомой. Какой результат у Вас получился? (угол *CAB* равен 60º).

Компьютерный эксперимент позволил нам найти ответ, однако не дал объяснения обнаруженному факту. Поэтому нам придется дополнить компьютерное решение аналитическим (поиск аналитического решения может быть организован по-разному: самостоятельная работа, работа с доской (один ученик у доски), эвристическая беседа учителя с классом).

5. Формирование умений решать задачи с параметром с привлечением компьютерного эксперимента.

Задача: Через концы хорды *AB* проведены две касательные, пересекающиеся в точке *C*. Установите, при каких значениях угла *ABC*.

- хорда равна радиусу;
- хорда меньше радиуса;
- хорда больше радиуса?

(Учащиеся самостоятельно выполняют чертёж на компьютере).

Результат построения:

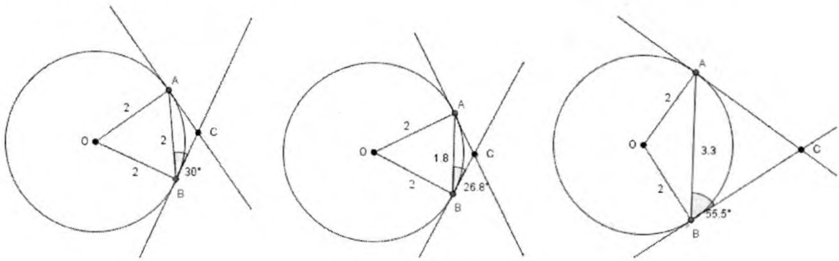


Рис. 138

(Чертежи проверяются. Учитель оценивает работу более сильных учащихся. Они проверяют работы остальных учеников. Оценивают и результаты передают учителю).

6. Подведение итогов урока.

Вопросы для обсуждения: Какова роль компьютерного/аналитического решения задач с параметрами?)

Оценить работу учащихся. (Итоговая оценка выставляется с учётом оценок, полученных учениками на разных этапах урока).

Оценочный лист			
Фамилия, имя			
Этапы урока	Устная работа на уроке	Самостоятельная работа	Построение чертежа для задачи с параметром
Оценка			
Итог			

Домашнее задание. Решить задачу аналитически и компьютерно.

Задача: Даны точка *A* и окружность с центром в точке *O* радиуса *4,5* см. Через точку *A* проведены две касательные к окружности. Найти угол между касательными, если $OA = 9$ см.

Н.А. Долинкина
ГОУ АО АКШИ « Архангельский морской кадетский корпус»
г. Архангельска

Площадь треугольника

Цель урока: ознакомление с выводом формулы для вычисления площади треугольника, формирование первичных умений, связанных с ее использованием при решении задач.

Оборудование: интерактивная доска, электронное издание и рабочая тетрадь «Наглядная планиметрия» [11].

Место проведения урока: компьютерный класс.

План урока:

Этап урока	Форма организации	Время
1. Организационный момент, проверка домашнего задания	Фронтальная работа с использованием интерактивной доски	7 мин.
2. Самостоятельная работа с последующей самопроверкой	Индивидуальная работа с использованием интерактивной доски	15 мин.
3. Знакомство с выводом формулы площади треугольника	Фронтальная работа с использованием ИГС в качестве средства демонстрационной наглядности	10 мин.
4. Применение формулы площади треугольника к решению задач	Одновременная индивидуальная работа учащихся за компьютерами. Фронтальная устная работа	10 мин.
5. Подведение итогов урока	Фронтальная работа	3 мин.

Ход урока:

1. Организационный момент.

Проверка домашнего задания (решение на экране).

№ 461 (*рис. 139*)

1. $h = 12 : 2 = 6$ (см)
2. $S = 6 \cdot 14 = 84$ (см^2)

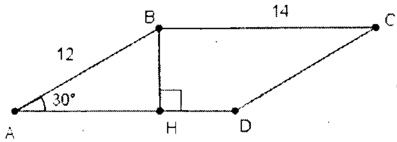


Рис. 139

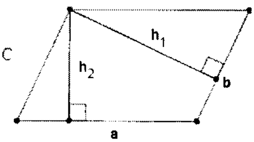


Рис. 140

№ 464 (а) (*рис. 140*)

$a = 18$ см; $b = 30$ см

$h_1 = 6$ см; $h_2 > h_1$, то

h_2 проведено к меньшей стороне $a = 18$ см

$S = 6 \cdot 30 = 180$ (см^2), $S = h_2 \cdot 18$ =>

=> $h_2 = 180/18 = 10$ см

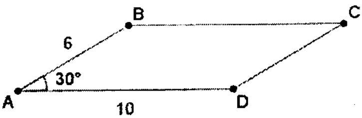


Рис. 141

Проверить, отмечено ли свойство сравнения высот и сторон, к которым они проведены.

2. Самостоятельная работа с последующей самопроверкой

Задача 1. Периметр квадрата 20 см, прямоугольник имеет такую же площадь, что и квадрат, а одна из сторон равна 10 см. Найдите периметр прямоугольника.

Задача 2. Найти площадь параллелограмма (*рис. 141*).

Проверка самостоятельной работы, сами учащиеся сверяют решение с решением на экране.

Решение *задачи 1*:

1) Сторона квадрата $q = 20:4 = 5$ (см).
2) $S_{кв} = 5 \cdot 5 = 25$ (см^2).
3) $S_{пр\text{-}ка} = S_{кв} = 25$(см^2), то вторая сторона прямоугольника $b = 25:10 = 2{,}5$ (см).
4) $P_{пр\text{-}ка} = (2{,}5 + 10) \cdot 2 = 25$ (см).

Решение *задачи 2*:

Дополнительное построение: высота h к стороне 10 см.

1) $h = 6:2 = 3$ см (по свойству катета, лежащего против угла в 30 градусов).
2) $S_{пар} = a \cdot h = 10 \cdot 3 = 30$ (см^2).

3. Знакомство с выводом формулы площади

Открываем на диске тему «Площадь треугольника». Смотрим видеоролик, затем при втором просмотре самостоятельно кто-либо из учащихся объясняет по видеоролику вывод формулы площади треугольника.

4. Применение формулы площади треугольника к решению задач.

Задача. Через вершину треугольника с основанием AB проведена прямая, параллельная его основанию. Исследуй вопрос о том, как соотносятся площади треугольников с основанием AB, вершины которых лежат на данной прямой.

Решение:

Строим чертеж задачи в программе GeoGebra:

1) Постройте треугольник ABC, используя инструмент ;

2) Проведите через точку C прямую, параллельную AB, с помощью инструмента  - прямая d.

3) Воспользовавшись инструментом , отметьте на прямой d произвольно точку D.

4) Постройте треугольник DBC, используя инструмент .

Используя инструмент , найдите площади треугольников ABC и DBC. Используя инструмент , измените положение точки D. Сделайте вывод о соотношении площадей треугольников ABC и DBC (*рис. 142*).

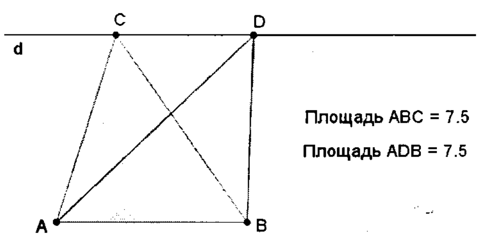


Рис. 142

Запишите вывод в рабочую тетрадь.

Вывод: площади треугольников с одинаковыми основаниями и вершинами, лежащими на прямой, параллельной основанию, равны.

Найдите логической объяснение подмеченной закономерности, используя формулу площади треугольника. Какой элемент в треугольнике надо построить дополнительно, чтобы вести речь о его площади? (высоту). Из каких вершин треугольников ABC и DBC необходимо опустить высоты? Ответ обоснуйте. Сравните высоты и объясните свой вывод (длины высот равны как расстояние между параллельными прямыми). Сделайте вывод о соотношении площадей треугольников ABC и ABD.

4. Применение формулы площади треугольника к решению задач

Решите задачи на готовых чертежах (*рис. 143*).

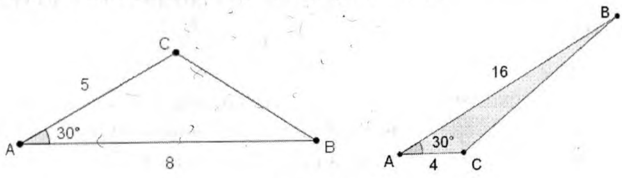


Рис. 143

5. Подведение итогов урока. Какие формулы мы сегодня учились применять? Какая формула является новой? *Домашнее задание*: пункт 52 (учить формулу и её вывод), №468 (а, в, г), №470.

Н.Е. Анохина

МОУ «СОШ № 2» г. Северодвинска

Координаты середины отрезка

Цели урока: Ознакомление учащихся с простейшими задачами в координатах, формирование умений применять знания координат середины отрезка к решению задач.

Оборудование: электронное издание и рабочая тетрадь «Наглядная планиметрия» [13], ПК.

Место проведения урока: компьютерный класс.

План урока:

Этап урока	Форма организации	Время
1. Организационный момент, актуализация базовых знаний	Фронтальная работа	5 мин.
2. Ознакомление с простейшими задачами в координатах	Одновременная индивидуальная или парная работа с использованием ИГС в демонстрационном режиме	5 мин.
3. Формирование умений применять знания координат середины отрезка к решению задач	Одновременная индивидуальная или парная работа за компьютером	17 мин.
4. Исследовательская работа на открытие способа построения параллелограмма с использованием знаний координат середины отрезка	Одновременная индивидуальная или парная работа за компьютером. Фронтальная работа	15 мин.
5. Подведение итогов урока и постановка домашнего задания	Фронтальная работа	3 мин.

Ход урока:

1. Организационный момент, актуализация базовых знаний.

Учащимся предлагается отгадать ребус (середина).

Что такое середина отрезка? (*О* – середина *АВ*, *АО*=*ВО*; сделать чертеж в тетради). Что называется серединным перпендикуляром? Где лежат точки, равноудаленные от концов отрезка? Напишите слова: перпендикуляр, середина, расстояние, абсцисса (вызвать ученика к доске).

2. Ознакомление с простейшими задачами в координатах.

Просмотр видеороликов из электронного издания тема «Простейшие задачи в координатах» (учащиеся работают с ИГС на компьютерах) с последующим обсуждением результатов просмотра.

3. Формирование умений применять знания координат середины отрезка к решению задач.

а) Решение задач для самостоятельного решения в теме «Применение метода координат к решению задач» с использованием ИГС.

Задача №2 (1). Даны точки *А* (-2;5), *В* (6;7). Найти координаты точки *С* (*x*; *y*) - середины *АВ*. Назовите координаты точки *С*(*x*; *y*).

Как можно найти абсциссу точки *С*, ординату точки *С*? Сделайте вывод.

Задача №2 (3). Даны точки *А* (6;4), *В* (-2;6). Найти координаты точки *С* (*x*; *y*) - середины *АВ*. Построить на динамической модели. Назовите координаты точки *С*(*x*; *y*).

Учитель проверяет выполнение задания у всех учащихся.

Задача №2 (4). Даны точки *А* (-4;2), *В* (0;0). Найти координаты точки *С* (*x*; *y*), если *В* - середина *АС*. Построить на динамической модели. Назовите координаты точки С (*x*; *y*).

Задача (написана на доске). Даны точки *А* (6;-2), *В* (1;3). Найти координаты точки *С* (*x*; *y*), если *В* - середина *АС*. Построить на динамической модели. Назовите координаты точки *С* (*x*; *y*).

Учитель проверяет выполнение задания у всех учащихся.

Задача №2 (5). На оси ординат найти точку, равноудаленную от начала координат и точки *А* (1; 1). Построить на динамической модели.

б) Далее идет работа учащихся в тетради без использования ИГС.

Для подготовки к решению следующей задачи учащиеся преобразуют известные формулы координат середины отрезка: $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

$x_1 = 2x - x_2$; $y_1 = 2y - y_2$ - формулы нахождение координат концов отрезка.

Выполняется № 936 (берутся только числовые значения, таблицу учащиеся заранее чертят в тетради).

4. Исследовательская работа на открытие способа построения параллелограмма с использованием знаний координат середины отрезка (работа за компьютером с использованием ИГС).

Исследовательская задача: Построить параллелограмм, зная координаты трех его вершин: A(2;1), B(4;3), C(8;3). Найдите координаты его четвертой вершины. Найдите все возможные варианты решения этой задачи.

Все ли найденные варианты подходят для нахождения координат четвертой вершины прямоугольника, квадрата, ромба?

5. Подведение итогов урока и постановка домашнего задания.

Домашнее задание. Найти ответ на поставленный вопрос дома, проводя исследование с использованием ИГС. Решить задачи № 936 (взять буквенные значения), № 937.

Перечислите простейшие задачи в координатах, с решением которых мы познакомились сегодня. Какой из этих задач мы уделили на уроке больше внимания? По каким формулам можно найти координаты середины отрезка? Как найти координаты одного из концов отрезка по координатам другого его конца и середины?

Учитель отмечает учащихся, которые успешно справлялись с выполнением задач с использованием ИГС.

Окончание: «Всё хорошее – результат преодоления трудностей» (изречение древних).

А.А. Сычева
МОУ «СОШ № 90» п. Кулой Архангельской обл.

Второй признак равенства треугольников

Цели: подведение учащихся к открытию и доказательству второго признака равенства треугольников и формирование первичных умений его использования при решении задач.

Оборудование: электронное издание и рабочая тетрадь «Наглядная планиметрия» [12], ПК, мультимедиа - проектор, экран, презентация.

Место проведения урока: компьютерный класс.

План урока:

Этап урока	Форма организации	Время
1. Организационный момент	Фронтальная работа	3 мин.
2. Актуализация знаний и умений учащихся, связанных с использованием первого признака равенства треугольников	Фронтальная работа с использованием материалов презентации в демонстрационном режиме	10 мин.
3. Подведение к открытию 2 признака и его логическое доказательство	Одновременная индивидуальная или парная работа учащихся с ИГС. Фронтальная работа с использованием материалов презентации в демонстрационном режиме	15 мин.
4. Формирование первичных умений доказывать равенство треугольников с использованием 2 признака	Диагональная (посменная) работа с ИГС и задачами, представленными в презентации	7/7 мин.
5. Подведение итогов урока	Фронтальная работа	3 мин

Ход урока:

1. Организационный момент.

Сегодня на уроке мы продолжаем знакомство с признаками равенства треугольников – с утверждениями, которые позволяют обосновывать равенство этих фигур, не прибегая к их наложению.

2. Актуализация знаний и умений учащихся, связанных с использованием первого признака равенства треугольников.

Один из таких признаков вам уже знаком. Сформулируйте его.

Для того чтобы вспомнить, как этот признак используется при решении задач поработаем устно (решение задач на готовых чертежах *рис. 144*).

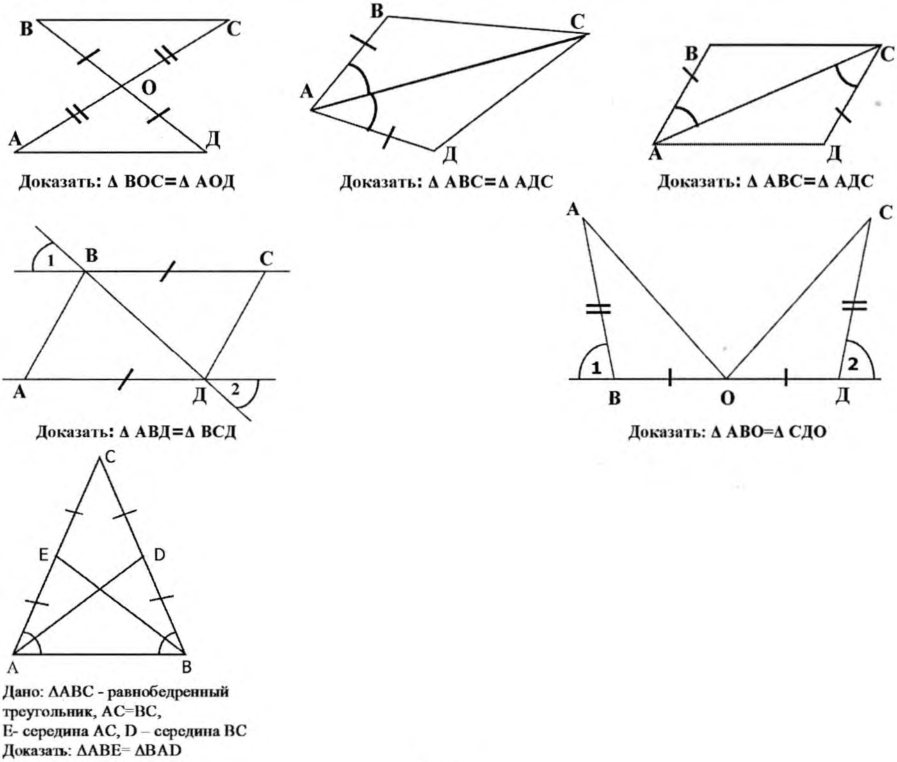


Рис. 144

3. Подведение к открытию 2 признака и его логическое доказательство.

Знания первого признака равенства треугольников помогут вам самостоятельно сформулировать второй признак. Для того, чтобы открыть его выполните на компьютере упражнения 1 – 3 в теме «Второй признак равенства треугольников» в разделе «Знакомство». Выводы, к которым вы пришли после выполнения каждого упражнения запишите в рабочие тетради.

Кто может теперь сформулировать второй признак равенства треугольников? (прочитайте ваши записи к упражнению 3).

Итак, второй признак равенства треугольников звучит так: «Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны».

Теперь нам предстоит доказать его. Доказательство я проговорю устно (чертеж, дано и доказать изображены на слайде), а вы сделаете соответствующие записи в тетради.

4. Формирование первичных умений доказывать равенство треугольников с использованием 2 признака.

Теперь наша задача научиться пользоваться новым признаком. Для этого разобьемся на две группы:

1 группа (формируется из наиболее подготовленных учащихся) сначала выполняют тест, помещенный в разделе «Задачи для самостоятельного решения» за компьютером, а затем учатся оформлять решения задач, предложенных на готовых чертежах.

2 группа учащихся – сначала работают вместе со мной над решением задач на готовых чертежах из презентации, а затем выполняют тест за компьютерами самостоятельно.

5. Подведение итогов урока.

Давайте подведем итоги урока. Какой признак мы сегодня изучили? Равенство каких элементов необходимо для доказательства равенства треугольников с использованием второго признака? Поднимите руку те, кто считает, что после нашего урока сможет доказать равенство треугольников сам?

Думаю, вы сможете это проверить сами, выполняя домашнее задание.

Домашнее задание: п.19 стр. 38 (учебник), задачи №3, 4 стр. 52-53 в рабочей тетради.

М.В. Белорукова
МОУ «СОШ № 8» г. Архангельска

Прямоугольный треугольник. Решение задач

Цель: Совершенствовать навыки решения задач на применение свойств прямоугольного треугольника, признаков равенства прямоугольных треугольников.

Оборудование: электронное издание и рабочая тетрадь «Наглядная планиметрия» [12], учебник [2], ПК, мультимедиа проектор, экран, презентация.

Место проведения урока: компьютерный класс.

План урока:

Этап урока	Форма организации	Время
1. Организационный момент	Фронтальная работа	2 мин
2. Теоретический опрос	Фронтальная работа	4 мин
3. Самостоятельная работа с последующей взаимопроверкой	Индивидуальная работа. Парная работа	3 мин
4. Решение задач на готовых чертежах	Фронтальная работа с использованием презентации	4 мин

5. Подведение к открытию 5 признака равенства прямоугольных треугольников	Одновременная индивидуальная работа учащихся в ИГС	5 мин
6. Решение задач из электронного издания для подведения к открытию дополнительных признаков равенства прямоугольных треугольников	Одновременная индивидуальная работа учащихся в ИГС	10 мин
7. Доказательство дополнительных признаков равенства прямоугольных треугольников	Групповая работа без ИГС	15 мин
8. Подведение итогов урока	Фронтальная работа	2 мин

1. Организационный момент

Сообщить тему урока.

Эпиграф:

«Вдохновение нужно в геометрии не меньше, чем в поэзии».

А. С. Пушкин

Сегодня на уроке:

- повторим теоретический материал по теме: «Прямоугольный треугольник»;
- в качестве самостоятельной работы вам будет предложен небольшой тест;
- продолжим решение задач по данной теме;
- вторая часть урока – работа на компьютерах – решение задач из рабочей тетради на печатной основе, используя программу GeoGebra;
- в конце урока – работа в группах: доказательство фактов, установленных экспериментально.

2. Теоретический опрос

1) Какой треугольник называется прямоугольным?

2) Как называются стороны прямоугольного треугольника?

3) Перечислите свойства прямоугольного треугольника (свойство острых углов; свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°; свойство катета прямоугольного треугольника, равного половине гипотенузы; свойство острых углов прямоугольного равнобедренного треугольника; свойство медианы прямоугольного треугольника, проведённой из вершины прямого угла).

4) Сформулируйте признаки прямоугольных треугольников.

5) Перечислите признаки равенства прямоугольных треугольников (по двум катетам; по катету и прилежащему к нему острому углу; по гипотенузе и катету; по гипотенузе и острому углу).

6) Сколько признаков равенства прямоугольных треугольников вы знаете? (4).

На самом деле их пять. Сегодня на уроке вы познакомитесь ещё с одним признаком равенства прямоугольных треугольников. Мы повторили теоретический материал по теме «Прямоугольный треугольник». Теперь небольшой тест.

3. Самостоятельная работа с последующей взаимопроверкой.

Пододвиньте листочки. На листочках подпишите - число, фамилия.

Закончите предложение (на листочках впишите слово, которое вставляете или сочетание слов).

1) Гипотенузой прямоугольного треугольника называется…

2) В прямоугольном треугольнике…больше катета.

3) Катет прямоугольного треугольника, …, равен половине гипотенузы.

4) Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам: …

5) Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе равна …

Взаимопроверка по слайду. Обменяйтесь листочками. Если ответ верный – ставите «+». Если ответ неверный – ставите «-». Оценка выставляется по количеству плюсов. Оцененные работы сдаются учителю.

4. Решение задач на готовых чертежах (фронтальная работа с классом).

Задача 1.

BD –биссектриса угла ABC

Доказать *BD* – биссектриса угла *ADC* (*рис. 145*).

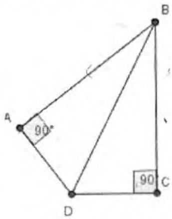


Рис. 145

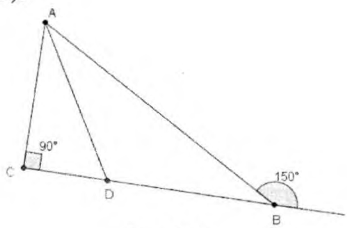


Рис. 146

Задача 2.

AD – биссектриса угла *A*.

Найти углы треугольника *ADC* (*рис. 146*).

5.Подведение к открытию 5 признака равенства прямоугольных треугольников.

Работа с компьютером (программа «Geonext», Запуск с диска).

Задача: Построить два прямоугольных треугольника, у которых один из катетов равен 4 см, а острый угол, противолежащий данному катету, равен $60°$.

Исследуйте вопрос о том, будут ли равны данные треугольники.

Теперь вы можете сформулировать ещё один (пятый) признак равенства прямоугольных треугольников.

Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу. Доказательство данного признака проведёте дома.

6. Решение задач из электронного издания для подведения к открытию дополнительных признаков равенства прямоугольных треугольников.

Решение задач из рабочей тетради на печатной основе, используя программу GeoGebra.

Рассаживаемся за компьютеры. Открываем рабочие тетради на печатной основе задачи 2, 3, 4 на стр. 77-78.

Ваша задача: используя динамическую модель, установить, равны ли треугольники. В рабочей тетради на печатной основе записать только вывод для каждой задачи (т.е $\Delta ABC = \Delta EB_1C_1$ или $\Delta ABC \neq \Delta EB_1C_1$).

Вопрос для обсуждения: что можно сказать про треугольники ABC и EB_1C_1?

7. Доказательство дополнительных признаков равенства прямоугольных треугольников.

Разбиваемся на три группы.

Ваша задача: через 5 – 7 минут представить доказательство данного факта.

I группа – задача 2.

II группа – задача 3.

III группа – задача 4.

Каждая группа представляет доказательство. Выступает один человек от группы. Все остальные записывают решение в рабочей тетради.

8. Подведение итогов урока.

Вопрос для обсуждения: Какие новые утверждения геометрии нам удалось открыть сегодня на уроке?

Домашнее задание:

1) Доказать признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу.

2) Доказать равенство остроугольных треугольников по двум углам и высоте, проведённой из вершины третьего угла (чертёж можно сделать в программе GeoGebra).

Литература

1. *Аствацатуров Г. О.* Дизайн мультимедийного урока: методика, технологические приемы, фрагменты уроков. Волгоград: Учитель, 2009. 133 с.

2. *Безусова Т.А.* Некорректные задачи как средство развития культуры математического и естественнонаучного мышления школьников. Автореф. дисс. … к.п.н. Тюмень, 2008.

3. Геометрия, 7–9: Учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 18-е изд. М.: Просвещение, 2008.

4. *Горнштейн П.И., Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.* Подводные рифы конкурсного экзамена по математике. К.: Евроиндекс Лтд, 1994. 240 с.

5. *Далингер В.А.* Методика обучения учащихся доказательству математических предложений. – М.: Просвещение, 2006.

6. *Демидова Т.Е., Тонких А.П.* Теория и практика решения текстовых задач: Учеб. Пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. М.: Академия, 2002. 288 с.

7. Дидактор – сайт педагога-практика. Режим доступа: http://didaktor.ru

8. *Добрица В.П., Локтионова Н.Н.* Компьютер и урок // Информационные технологии в образовании. Режим доступа: http://ito.edu.ru/2008/Kursk/I/I-0-8.html

9. *Дубровский В.* Динамическая геометрия с «Математическим конструктором». Эпизоды 2-3 // Математика. 2011. № 11-12.

10. *Кнут Д.* Все про TEX = The TEXBook. — М.: Вильямс, 2003.

11. *Ковалева Г.И.* Варьирование как метод построения систем задач по математике // Ярославский педагогический вестник. 2009. № 4.

12. *Краснова Г.А., Беляев М.И., Соловов А.В.* Технологии создания электронных обучающих средств. 2-е изд. М., Изд-во МГИУ, 2002. // Сайт Института международных программ и сравнительной образовательной политики РУДН. Режим доступа: http://www.ido.rudn.ru/Open/technology/index.html

13. Методика использования компьютерных моделей на уроках. Режим доступа: http://www.biology.ru/course/content/chapterM/section3/paragraph1/theory.html

14. Методические рекомендации по использованию персональных компьютеров на уроках. Режим доступа: http://www.rusedu.info/Article78.html

15. Обучение геометрии с использованием интерактивной геометрической среды: дидактические материалы для 7–9 классов: методическое пособие / [С.Н. Котова, Р.П. Овчинникова, А.Е. Томилова и др., отв. ред. М.В. Шабанова]; САФУ им. М.В. Ломоносова». Архангельск: КИРА, 2011. 93 с.

16. *Протасов В.Ю., Шарыгин И.Ф.* Геометрия. 7 кл.: Рабочая тетрадь к учебнику И.Ф. Шарыгина «Геометрия. 7–9». М.: Дрофа, 2002. 96 с.

17. *Розов Н.Х., Сергеева Т.Ф., Сербис И.Н.* Наглядная планиметрия. Рабочая тетрадь для 8 класса. М.: Факультет педагогического образования МГУ им. М.В. Ломоносова, 2009. 76 с.

18. *Розов Н.Х., Ягола А.Г., Сергеева Т.Ф., Сербис И.Н.* Наглядная планиметрия. Рабочая тетрадь для 7 класса. М.: Факультет педагогического образования МГУ им. М.В. Ломоносова, 2009. 80 с.

19. *Розов Н.Х., Ягола А.Г., Сергеева Т.Ф., Сербис И.Н.* Наглядная планиметрия. Рабочая тетрадь для 9 класса. М.: Факультет педагогического образования МГУ им. М.В. Ломоносова, 2009. 76 с.

20. *Рябинина О.* Эффективное использование компьютера на уроках // Персональный сайт учителя технологии Рябининой Оксаны. Режим доступа: http://ryabininasite.ucoz.ru/load/1-1-0-14

21. Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ: 2012: Математика / авт.-сост. И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. М.: АСТ: Астрель, 2011. 93 с.

22. *Селевко Г.К.* Учитель проектирует компьютерный урок. Режим доступа: http://86mmc-konda.edusite.ru/p20aa1.html

23. *Сергеева Т.Ф., Ягола А.Г., Сербис И.Н.* Информационные технологии в преподавании школьного курса геометрии: классика и современность // Современные тенденции развития естественнонаучного образования: фундаментальное университетское образование. Сборник / Под общей ред. академика В.В. Лунина. М.: Изд-во МГУ, 2010. С. 85-91.

24. *Успенский В. А.* Семь размышлений на темы философии математики (Что такое доказательст-во?)//«Закономерности развития современной математики». М., Наука, 1987. с. 106 – 155.

25. *Хализев В.Н., Марков В.Н.* Подход к обеспечению корректности программ. Режим доступа: http://www.swsys.ru/index.php?page=article&id=1196

26. *Храповицкий И.С.* Методические рекомендации по применению электронного учебного издания Geometer's Sketchpad в учебном процессе общеобразовательных учреждений. 2008 // Живой журнал. Блог И.С. Храповицкого. Режим доступа: http://janka-x.livejournal.com/53212.html

27. *Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7–9 кл. 3-е изд. М.: Дрофа, 1999. 352 с.*

28. *Якиманская И.С.* Технология личностно-ориентированного образования. – М.: Сентябрь, 2000г.

Учебно-методическое пособие

ОБУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОЗМОЖНОСТЕЙ GEOGEBRA

Печатается в авторской редакции
Подписано в печать 5.11.2011. Формат 60x90/ 16.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 8,75.
Тираж 200 экз. Заказ № 1026
Отпечатано с готового оригинал-макета
ООО «Ларк» 123298, г. Москва, ул. Маршала Бирюзова, д.1.