

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Направление: 050100.68: Педагогическое образование

Профиль: Информационные технологии в физико-математическом образовании

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Методическое пособие по GeoGebra: система компьютерной алгебры (CAS)

Работа завершена:

«__» _____ 2015 г. _____ (Абухамам Сами)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель,

д.ф.-м.н., доцент

«__» _____ 2015 г. _____ (Попов А.А.)

Рецензент:

к.ф.-м.н., доцент

«__» _____ 2015 г. _____ (Щербакова Н.К.)

Дата защиты:

«__» _____ 2015 г. Оценка _____

Заведующий кафедрой

Доктор физ.-мат. наук, профессор

«__» _____ 2015 г. _____ (Игнатъев Ю.Г.)

Казань – 2015 год

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Введение | 4 |
| Глава I. Основы работы с GeoGebra..... | 6 |
| Запуск программы..... | 6 |
| Система компьютерной алгебры (CAS – Computer Algebra System)..... | 8 |
| Сочетания клавиш для быстрого ввода | 9 |
| Панель инструментов окна CAS..... | 10 |
| Заголовок строки контекстного меню | 11 |
| Контекстное меню поля вывода | 11 |
| Отображение математических объектов | 12 |
| Глава II. Символьные вычисления..... | 14 |
| Команда Max..... | 14 |
| Команда Min | 15 |
| Команда Div | 15 |
| Команда Деление | 16 |
| Команда ОбщийЗнаменатель | 17 |
| Команда ПолныйКвадрат | 17 |
| Команда ИррацФакторизация..... | 18 |
| Команда КоличествоДелителей..... | 18 |
| Команда СписокДелителей | 19 |
| Команда СуммаДелителей | 19 |
| Команда ПростыеМножители..... | 19 |
| Команда Разложить..... | 20 |
| Команда НОД | 20 |
| Команда НОК | 22 |

| | |
|--|-----------|
| Команда ПереводВДесятичнуюСистему | 23 |
| Команда ПереводВСистемуСчисления..... | 24 |
| Команда ПредыдущееПростоеЧисло | 24 |
| Команда СледующееПростоеЧисло | 25 |
| Команда Простое..... | 25 |
| Команда ЛеваяЧасть | 26 |
| Команда ПраваяЧасть | 27 |
| Глава III. Функции и исчисление | 28 |
| Команда Числитель..... | 28 |
| Команда Упростить..... | 28 |
| Команда ТригонометрияУпрощение | 29 |
| Команда ТригонометрияРаскрытие | 29 |
| Команда ТригонометрияРазложение | 30 |
| Команда Разложения..... | 32 |
| Команда ТочкаПерегиба..... | 32 |
| Задачи для самостоятельного решения | 34 |
| Вариант 1..... | 34 |
| Вариант 2..... | 37 |
| Вариант 3..... | 40 |
| Заключение..... | 82 |
| Литература..... | 83 |

Введение

GeoGebra – свободно– распространяемая (GPL) динамическая геометрическая среда, которая даёт возможность создавать «живые чертежи» в планиметрии, в частности, для построений с помощью циркуля и линейки. Кроме того, у программы богатые возможности работы с функциями (построение графиков, вычисление корней, экстремумов, интегралов и т.д.) за счёт команд встроенного языка (который, кстати, позволяет управлять и геометрическими построениями). Программа написана Маркусом Хохенвартером на языке Java (соответственно работает медленно, но на большинстве операционных систем).

Целью дипломной работы является разработка методического пособия по использованию системы компьютерной алгебры (CAS) GeoGebra в образовательном процессе. Облегчить обучение школьников решению математических задач, а также ускорить процесс алгебраических вычислений и преобразований на персональном компьютере при помощи среды GeoGebra. Работа предназначена также для обучения учителей применению данной программы для проведения алгебраических вычислений и преобразований на персональном компьютере при помощи GeoGebra. Задачи и упражнения, приведенные в качестве примеров и практических заданий.

Актуальность работы продиктована отсутствием русскоязычного раздела справки.

Квалификационная работа состоит из введения, 3-х глав, контрольных вопросов, 15-ти вариантов контрольных заданий, заключения и списка использованной литературы.

Целевая аудитория данного пособия, в первую очередь, это студенты педагогических вузов и учителя математики, физики и близких им предметных областей, в которых часто применяются геометрические

построения. Программа может быть быстро освоена людьми имеющими элементарные навыки работы на компьютере, что несомненно является большим преимуществом данного программного продукта. К еще одному аргументу в пользу GeoGebra можно отнести её простую интеграцию с офисными приложениями.

Глава I. Основы работы с GeoGebra

GeoGebra – это свободная образовательная математическая программа, соединяющая в себе геометрию, алгебру и математические исчисления.

Проще говоря, вы можете строить чертежи, используя точки, векторы, отрезки, линии и конусные сечения, а также другие функции, которые вы сможете впоследствии изменять, работая только с помощью мыши. С другой стороны, возможен также прямой ввод условными символами, например:

g: $3x+4y=7$ или с: $(x-2)^2+(y-3)^2=25$, и перечень команд, включая дифференцирование и интегрирование – всё это в вашем распоряжении. Самой запоминающейся характеристикой GeoGebra является двойное отображение объектов, то есть каждое выражение в окне алгебры соответствует объекту в блокноте и наоборот.

Запуск программы

После запуска GeoGebra появляется окно, как показано ниже (Рисунок 1). С помощью чертежных инструментов (моделей), которые выбираются на панели инструментов, вы можете строить чертежи в блокноте, используя мышь. В это же время соответствующие координаты и уравнения отображаются в окне алгебры. Поле ввода текста используется для непосредственного ввода координат, уравнений, команд, функций; они сразу отображаются в блокноте после нажатия клавиши ввод (Enter).

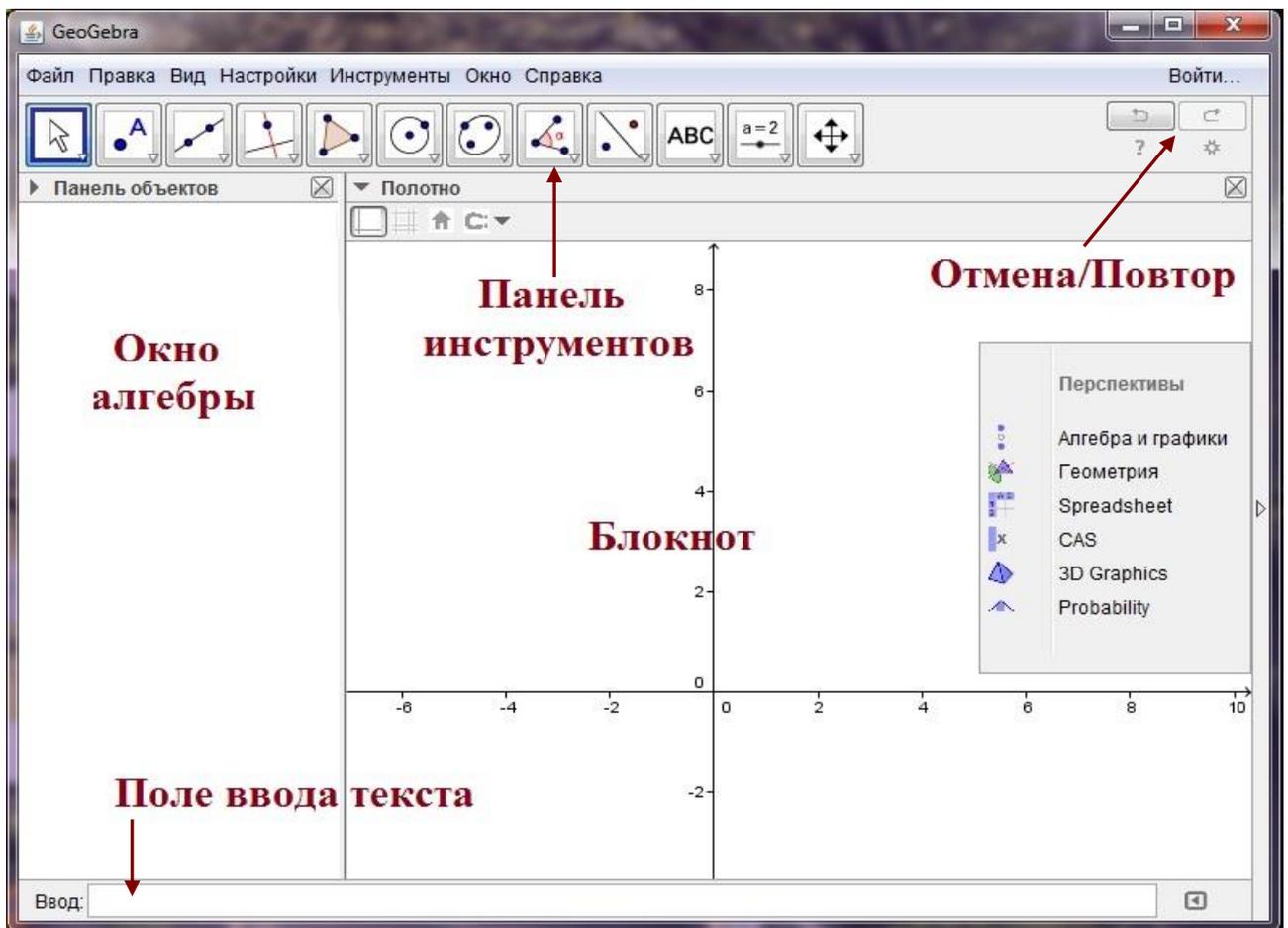
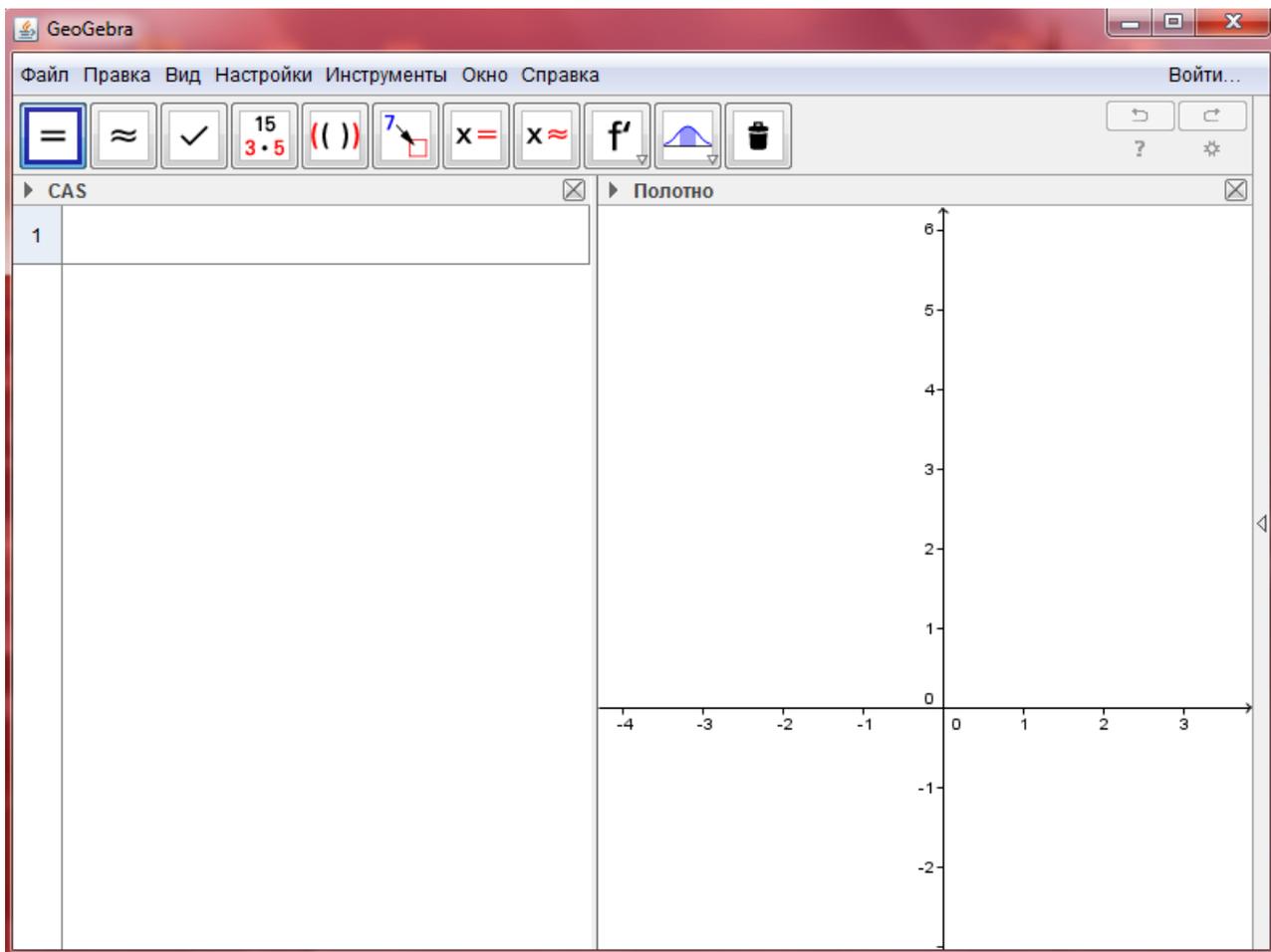


Рисунок 1

Система компьютерной алгебры (CAS – Computer Algebra System)

Система компьютерной алгебры (CAS) в GeoGebra позволяет производить символьные вычисления. Окно CAS можно открыть, нажав левой кнопкой мыши стрелку в правой части основного окна GeoGebra и выбрав строку CAS.

Окно CAS



Это окно содержит клетки со строкой ввода вверху и поле вывода сразу под полем ввода. Строку ввода можно использовать, как и обычную строку ввода внизу основного экрана GeoGebra со следующими различиями:

- можно использовать переменные, которым не присвоены какие-либо значения

Например: Введите $(a+b)^2$ в строку ввода CAS и нажмите кнопку Enter. на выходе Вы получите $a^2+2ab+b^2$;

- знак равенства (=) используется в уравнениях, а знак := для присваивания значений. Это означает, что если ввести в строку ввода $a=2$, то переменная a будет равна 2;
- умножение должно быть обозначено знаком *. Если в обычной строке ввода внизу основного экрана GeoGebra правильными являются записи $a(b+c)$ и $a*(b+c)$, то в строке ввода CAS правильной является только запись $a*(b+c)$.

Сочетания клавиш для быстрого ввода

В окне CAS следующие клавиши помогут Вам быстро вычислить или проверить правильность вводимой информации.

- **Enter**: вычисляет выражение, записанное в строке ввода CAS;
- **Ctrl + Enter**: вычисляет выражение, записанное в строке ввода CAS. Например: $\text{sqrt}(2) \rightarrow \text{Ctrl}+\text{Enter} \rightarrow 1.41$;
- **Alt + Enter**: Проверяет ваш ввод, но не вычисляет его. Например: $b + b \rightarrow \text{Alt}+\text{Enter} \rightarrow b + b$.

В окне CAS следующие сочетания быстрых клавиш помогут Вам использовать информацию окна предыдущего ввода или вывода в новой строке:

- клавиша = вставляет предыдущий ввод в новую строку;
- клавиша **Space** вставляет предыдущий вывод в новую строку;
- клавиша) вставляет предыдущий вывод в круглые скобки в новой строке.

Замечание: Вы можете отменить появление строки вывода, поставив в конце строки ввода точку с запятой, например $a := 5$.

Примечание: Вместо использования этих клавиш, Вы можете пользоваться кнопками панели инструментов окна CAS.

Панель инструментов окна CAS



Панель инструментов окна CAS предоставляет широкий спектр *CAS Инструментов*, которые позволяют выполнять вычисления с помощью щелчка левой клавишей мыши по соответствующей иконки панели инструментов окна CAS.

Примечание: Вы можете выбрать часть вводимого текста и применить операцию только к этой выбранной части.

| | | |
|---|------------------|--|
|  | Вычислить | Вычислить результат – кнопка вычисляет значение выражения. |
|  | Десятичная дробь | Представление в виде десятичной дроби. |
|  | Закрепить ввод | Сохраняет и проверяет. |
|  | Факторизация | Раскладывает на множители. |
|  | Раскрыть скобки | Раскрыть скобки. |
|  | Замена | Заменяет часть выражения. |
|  | Решить | Находит одно или более решений уравнений. |
|  | Производная | Находит первую производную или вычисляет интеграл |
|  | Интеграл | |



Калькулятор Окно для вычисления вероятностей и исследования вероятностей функций.



Удалить Удаление выделенного объекта.

Заголовок строки контекстного меню

Щелкните правой кнопкой мыши на номер строки для того, чтобы открылось контекстное меню со следующими опциями:

- **Вставить строку выше:** вставляет пустую строку над текущей;
- **Вставить строку ниже:** вставляет пустую строку ниже текущей;
- **Удалить строку:** удаляет содержимое текущей строки;
- **Текстовое поле:** переключение между текущим результатом и текстом, показывающим текущий результат, содержащийся в строке, что позволяет пользователю вставлять комментарии;
- **Скопировать как LaTeX:** копирует содержимое текущей строки в буфер обмена компьютера, что позволяет вставить содержимое, например, в tex-файл.

Примечание: Чтобы скопировать содержимое более одной строки как LaTeX, выберите строки (т.е. нажав клавишу Ctrl и наведя указатель мыши на нужный номер строки щелкните левой кнопкой мыши), которые необходимо скопировать, затем щелкните правой кнопкой мыши на номере какой-либо из этих строк и выберите опцию Скопировать как LaTeX.

Контекстное меню поля вывода

Если щелкнуть левой кнопкой мыши на поле вывода окна CAS, то появится *Контекстное Меню* со следующими опциями:

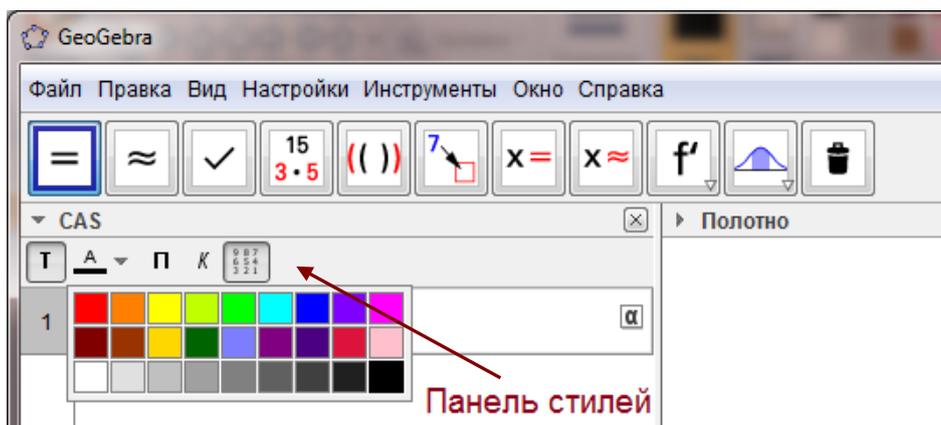
- **Копировать:** копирование содержимого ячейки в буфер обмена компьютера. Затем можно щелкнуть правой кнопкой мыши в новой

строке для того, чтобы появилась возможность вставки содержимого буфера обмена.

- **Скопировать как LaTeX:** копирует содержимое строки в формате LaTeX в буфер обмена компьютера, что позволяет вставить это содержимое, например, в tex – файл.
- **Скопировать как формулу LibreOffice:** копирует содержимое строки в формате LibreOffice в буфер обмена компьютера, поэтому это содержимое может быть вставлено в текстовый документ.
- **Копировать как изображение:** копирует содержимое строки в формате PNG в буфер обмена компьютера, поэтому это содержимое может быть вставлено в файл изображения или, например, текстовый документ Word.

Отображение математических объектов

Ниже панели инструментов окна CAS находится панель стилей

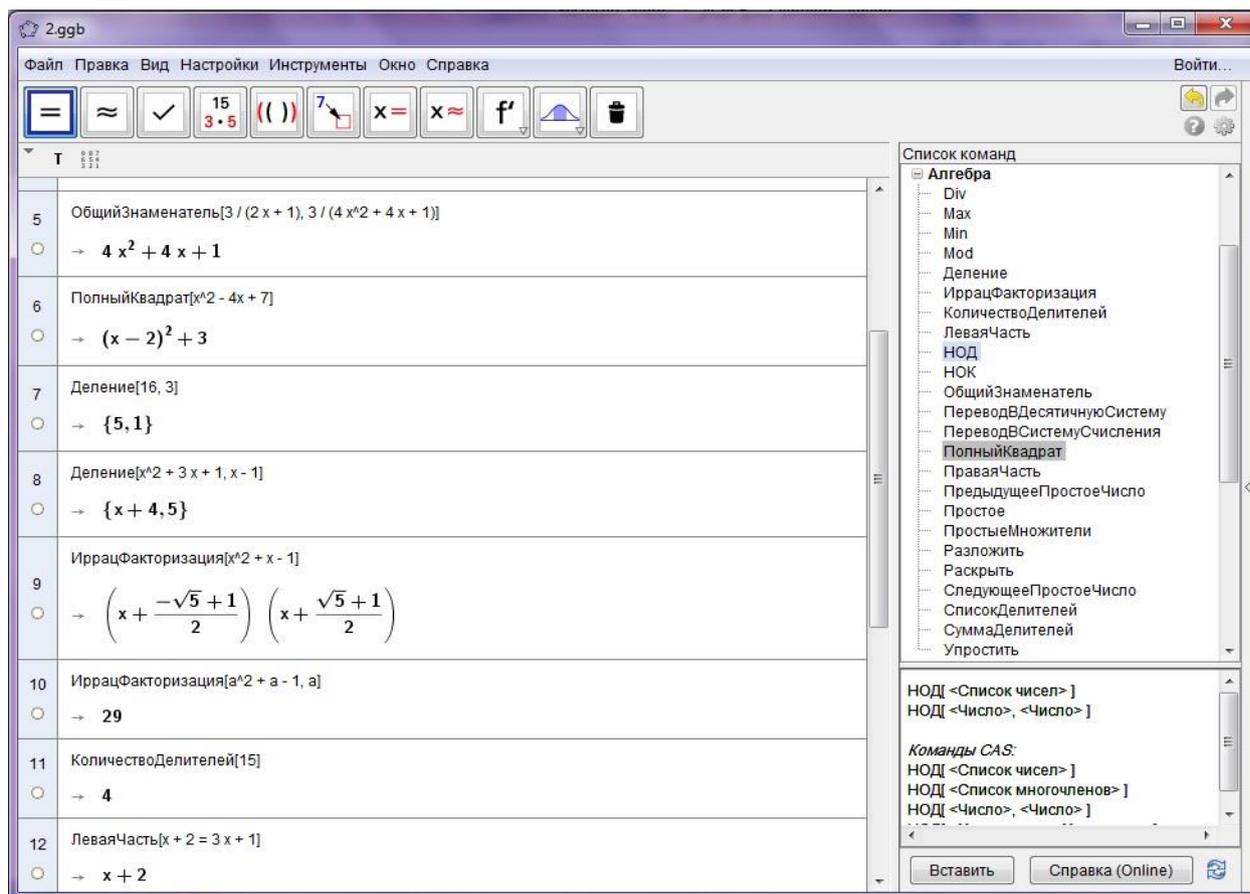


Эта панель содержит следующие кнопки:

- **T** кнопка форматирования текста - позволяет изменить стиль и **A** цвет текста:
- **П** кнопка включает жирный шрифт, работает после нажатия клавиши Enter;

-  кнопка включает курсивный шрифт, работает после нажатия клавиши Enter;
-  кнопка отображает виртуальную клавиатуру.

Глава II. Символьные вычисления



Рассмотрим некоторые команды символьных вычислений, которыми можно воспользоваться в окне CAS.

Команда Max

Синтаксис команды имеет вид:

Max [<Число>, <Число>]

Команда находит большее из двух заданных чисел.

Пример: найти большее из чисел 2, -3.

Max [2, -3]

→ 2

Команда находит также большее из набора заданных чисел.

Пример: найти большее из чисел $-3, 5, 0.4, 7/3$.

$$\text{Max}[-3, 5, 0.4, 7/3]$$

→ **5**

Команда Min

Синтаксис команды имеет вид:

Min [<Число>, <Число>]

Команда находит меньшее из двух заданных чисел.

Пример: найти меньшее из чисел $2, -3$.

$$\text{Min}[2, -3]$$

→ **-3**

Команда находит также меньшее из набора заданных чисел.

Пример: найти меньшее из чисел $-3, 5, 0.4, 7/3$.

$$\text{Min}[-3, 5, 0.4, 7/3]$$

→ **-3**

Команда Div

Синтаксис команды имеет вид

Div [<Делимое>, <Делитель>]

Команда возвращает целую часть частного от деления <Делимого> на <Делитель>.

Пример: вычислить целую часть частного от деления 16 на 3 .

`Div[16, 3]`

→ **5**

В качестве <Делимого> и <Делителя> могут быть использованы полиномы.

Пример: Разделить многочлен $x^2 + 3x + 1$ на многочлен $x - 1$.

`Div[x^2 + 3 x + 1, x - 1]`

→ **x + 4**

Команда Деление

Синтаксис команды имеет вид:

Деление [<Делимое число>, <Делитель число>]

Команда возвращает целую часть частного и остаток от деления двух чисел.

Пример: найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел *16* и *3*.

`Деление [16, 3]`

→ **{5, 1}**

В качестве <Делимого> и <Делителя> могут быть использованы полиномы.

Пример: найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $x^2 + 3x + 1$ и $x - 1$.

`Деление [x^2 + 3 x + 1, x - 1]`

→ {x + 4, 5}

Команда ОбщийЗнаменатель

Синтаксис команды имеет вид:

ОбщийЗнаменатель [<Число>, <Число>]

Команда возвращает число, являющееся наименьшим общим знаменателем двух рациональных чисел.

Пример: найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $1/6$ и $2/15$.

ОбщийЗнаменатель [1/6, 2/15]

→ 30

ОбщийЗнаменатель [<Выражение>, <Выражение>]

Команда возвращает функцию, являющуюся наименьшим общим знаменателем двух выражений.

Пример: найти наименьший общий знаменатель выражений $3/(2x + 1)$ и $3/(4x^2 + 4x + 1)$.

ОбщийЗнаменатель [3/(2x + 1), 3/(4x^2+4x+1)]

→ $4x^2 + 4x + 1$

Команда ПолныйКвадрат

Синтаксис команды имеет вид:

ПолныйКвадрат [<Квадратическая функция>]

Команда выделяет полный квадрат в полиноме второй степени $ax^2 + bx + c$ в виде: $a(x-h)^2 + k$.

Пример: выделить полный квадрат в $x^2 - 4x + 7$.

ПолныйКвадрат [$x^2 - 4x + 7$]

$$\rightarrow (x - 2)^2 + 3$$

Команда ИррацФакторизация

Синтаксис команды имеет вид:

ИррацФакторизация [<Многочлен>]

Команда раскладывает многочлен на множители над множеством иррациональных чисел.

Пример: разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^2 + x - 1$.

ИррацФакторизация [$x^2 + x - 1$]

$$\rightarrow \left(x + \frac{-\sqrt{5}+1}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)$$

Команда КоличествоДелителей

Синтаксис команды имеет вид:

КоличествоДелителей [<Число>]

Команда вычисляет количество всех положительных делителей натуральных чисел, включая само число.

Пример: вычислить количество всех положительных делителей, включая само число $\{15=1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 15\}$.

КоличествоДелителей [15]

$$\rightarrow 4$$

Команда СписокДелителей

Синтаксис команды имеет вид:

СписокДелителей [<Число>]

Команда возвращает список всех положительных делителей числа, включая и само число.

Пример: найти все положительные делители числа *15*.

СписокДелителей [15]

→ {1, 3, 5, 15}

Команда СуммаДелителей

Синтаксис команды имеет вид:

СписокДелителей [<Число>]

Команда вычисляет сумму всех положительных делителей числа, включая и само число.

Пример: найти сумму всех положительных делителей числа *15* ($1 + 3 + 5 + 15 = 24$).

СуммаДелителей [15]

→ 24

Команда ПростыеМножители

Синтаксис команды имеет вид:

ПростыеМножители [<Число>]

Команда возвращает список простых чисел, произведение которых равно данному числу.

Пример: разложить числа 1024 и 42 на простые множители.

ПростыеМножители [1024]

→ {2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2}

ПростыеМножители [42]

→ {2, 3, 7}

Команда Разложить

Синтаксис команды имеет вид:

Разложить [<Многочлен>]

Команда раскладывает многочлен на множители.

Пример: разложить многочлены $x^2 - y^2$ и $x^2 + x - 6$ на множители.

Разложить [$x^2 - y^2$]

→ **(x - y) (x + y)**

Разложить [$x^2 + x - 6$]

→ **(x - 2) (x + 3)**

Для исполнения этой команды необходимо загрузить систему компьютерной алгебры, поэтому выполнение этой команды на некоторых компьютерах может занять определенное время.

Эта команда также раскладывает многочлен на множители относительно данной переменной.

Команда НОД

НОД – наибольший общий делитель нескольких чисел.

Синтаксис команды имеет вид:

НОД [<Число>, <Число>]

Команда вычисляет наибольший общий делитель натуральных двух чисел.

Пример: вычислить наибольший общий делитель двух чисел *12* и *15*.

НОД[12, 15]

→ **3**

НОД [<Список чисел>]

Команда также вычисляет наибольший общий делитель списка натуральных чисел.

Пример: вычислить наибольший общий делитель чисел *12*, *30*, *18*.

НОД[{12, 30, 18}]

→ **6**

НОД [<Многочлен>, <Многочлен>]

С помощью команды можно также вычислить наибольший общий делитель двух многочленов.

Пример: найти наибольший общий делитель двух многочленов $x^2 + 4x + 4$ и $x^2 - x - 6$.

НОД[$x^2 + 4x + 4$, $x^2 - x - 6$]

→ **$x + 2$**

НОД [<Список многочленов>]

С помощью команды можно также вычислить наибольший общий делитель списка многочленов.

Пример: найти наибольший общий делитель многочленов $x^2 + 4x + 4$, $x^2 - x - 6$, $x^2 + 6x + 8$.

НОД[$\{x^2 + 4x + 4, x^2 - x - 6, x^2 + 6x + 8\}$]

→ **$x + 2$**

Команда НОК

НОК – Найти наименьшее общее кратное

Синтаксис команды имеет вид:

НОК [<Число>, <Число>]

Команда вычисляет наименьшее общее кратное двух натуральных чисел.

Пример: вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел 12, 15.

НОК[12, 15]

→ **60**

НОК[<Список чисел>]

Команда также вычисляет наименьшее общее кратное элементов в списке натуральных чисел.

Пример: вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел 10, 20, 22.

НОК[{12, 30, 18}]

→ **180**

НОК [<Многочлен>, <Многочлен>]

С помощью команды также возможно вычислить наименьшее общее кратное двух многочленов.

Пример: найти наименьшее общее кратное двух многочленов.

$$\text{НОК} [x^2 + 4x + 4, x^2 - x - 6]$$

$$\rightarrow (x + 2)(x^2 - x - 6)$$

НОК [<Список многочленов>]

Кроме того, команда позволяет вычислить наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке.

Пример: найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $x^2 + 4x + 4$, $x^2 - x - 6$, $x^3 - 4x^2 - 3x + 18$.

$$\text{НОК} [\{x^2 + 4x + 4, x^2 - x - 6, x^3 - 4x^2 - 3x + 18\}]$$

$$\rightarrow (x + 2)(x^3 - 4x^2 - 3x + 18)$$

Команда ПереводВДесятичнуюСистему

Синтаксис команды имеет вид:

ПереводВДесятичнуюСистему ["<Число в текстовом формате>", <Основание>]

Команда преобразует заданное в p -ичной системе счисления число в десятичную систему исчисления. Основание системы исчисления p должно удовлетворять условиям $2 \leq p \leq 36$. Исходное число должно быть целым.

Пример: перевести в десятичную систему счисления число FF , записанное в шестнадцатеричной системе счисления.

$$\text{ПереводВДесятичнуюСистему} ["FF", 16]$$

→ **255**

Перевести в десятичную систему счисления число *100000000*, записанное в двоичной системе счисления.

ПереводВДесятичнуюСистему ["100000000", 2]

→ **256**

Команда ПереводВСистемуСчисления

Синтаксис команды имеет вид:

ПереводВСистемуСчисления ["<Число в текстовом формате>", <Основание>]

Команда переводит данное число, записанное в десятичной системе счисления, в **p**-ичную систему исчисления. Основание системы исчисления **p** должно удовлетворять условиям $2 \leq p \leq 36$. Исходное число должно быть целым.

Пример: перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 255, записанное в десятичной системе счисления.

ПереводВСистемуСчисления [255, 16]

→ **FF**

Перевести в двоичную систему счисления число 256, записанное в десятичной системе счисления.

ПереводВСистемуСчисления [256, 2]

→ **100000000**

Команда ПредыдущееПростоеЧисло

Синтаксис команды имеет вид:

ПредыдущееПростоеЧисло[<Число>]

Команда возвращает наибольшее простое число, меньшее, чем введенное число.

Пример: найти наибольшее простое число, меньшее, чем *10000*.

```
ПредыдущееПростоеЧисло [10000]
```

→ **9973**

Команда СледующееПростоеЧисло

Синтаксис команды имеет вид:

ПредыдущееПростоеЧисло[<Число>]

Это команда возвращает наименьшее простое число, большее чем введенное число.

Пример: найти наименьшее простое число, большее чем *10000*.

```
СледующееПростоеЧисло [10000]
```

→ **10007**

Команда Простое

Синтаксис команды имеет вид:

Простое [<Число>]

Эта команда возвращает **true** или **false** в зависимости от того, является ли число простым или нет.

Пример: выяснить, являются ли числа *10* и *11* простыми.

```
Простое [10]
```

→ **false**

Простое [11]

→ **true**

Команда ЛеваяЧасть

Синтаксис команды имеет вид:

ЛеваяЧасть [<Уравнение>]

Команда возвращает левую часть уравнения.

Пример: найти левую часть уравнения $x + 2 = 3x + 1$.

ЛеваяЧасть [$x + 2 = 3x + 1$]

→ **$x + 2$**

Команда также возвращает список левых частей указанной системы уравнений.

Пример: найти список левых частей уравнений $a^2 + b^2 = c^2$, $x + 2 = 3x + 1$.

ЛеваяЧасть [{ $a^2 + b^2 = c^2$, $x + 2 = 3x + 1$ }]

→ **{ $a^2 + b^2$, $x + 2$ }**

Кроме того, команда позволят найти левую часть уравнения, номер которого определяется с помощью индекса.

ЛеваяЧасть [<Список уравнений>, <Индекс>]

Пример: найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $a^2 + b^2 = c^2$, $x + 2 = 3x + 1$, $y + 1 = 2y^2 - y + 4$.

ЛеваяЧасть [{ $a^2 + b^2 = c^2$, $x + 2 = 3x + 1$, $y + 1 = 2y^2 - y + 4$ }, 2]

→ **$x + 2$**

Команда ПраваяЧасть

Имеет синтаксис, аналогичный синтаксису команды **ЛеваяЧасть** и действует аналогично.

Пример: найти правую часть уравнения $x + 2 = 3x + 1$.

ПраваяЧасть [$x + 2 = 3x + 1$]

→ **$3x + 1$**

Пример: найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $a^2 + b^2 = c^2$, $x + 2 = 3x + 1$, $y + 1 = 2y^2 - y + 4$.

ПраваяЧасть [{ $a^2 + b^2 = c^2$, $x + 2 = 3x + 1$, $y + 1 = 2y^2 - y + 4$ }, 2]

→ **$3x + 1$**

Глава III. Функции и исчисление

Команда Числитель

Синтаксис команды имеет вид:

Числитель [<Функция>]

Это команда возвращает числитель функции.

Пример: найти числитель функции $\frac{3x^2 + 1}{2x - 1}$

Числитель [(3x² + 1) / (2x - 1)]

→ **3x² + 1**

Числитель [<Выражение>]

Это команда возвращает числитель рационального числа или выражения.

Пример: найти числитель числа $\frac{2}{3} + \frac{1}{15}$ (заметим, что $\frac{2}{3} + \frac{1}{15} = \frac{11}{15}$).

Числитель [2/3 + 1/15]

→ **11**

Команда Упростить

Синтаксис команды имеет вид:

Упростить [<Функция>]

Команда упрощает данную функцию, если это возможно.

Пример: упростить функцию $x + x + x$.

Упростить [x + x + x]

→ **3 x**

Команда упрощает данную функцию, если это возможно, Неопределенные переменные могут быть включены в условия.

Пример: упростить функцию $x + 2x + y + 3y^2 + 4x + (x+y)(x-y)$.

Упростить [$x+2x+y+3y^2+4x+(x+y)(x-y)$]

→ **$x^2 + 7x + 2y^2 + y$**

Команда ТригонометрияУпрощение

Синтаксис команды имеет вид:

ТригонометрияУпрощение [<Выражение>]

Это команда упрощает данные тригонометрические выражения.

Пример: упростить выражения $1 - \sin(x)^2$ и $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.

ТригонометрияУпрощение [$1 - \sin(x)^2$]

→ **$\cos^2(x)$**

Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.

ТригонометрияУпрощение [$\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$]

→ **$2 \sin^2(x)$**

Примечание: Эта команда работает только для функций одной переменной.

Команда ТригонометрияРаскрытие

Синтаксис команды имеет вид:

ТригонометрияРаскрытие [<Выражение>]

Эта команда преобразует тригонометрические выражения в выражения, в которых используются функции только простых переменных в качестве аргументов.

Пример: преобразовать функцию $\tan(x+y)$ в выражение, содержащее функции только от x и только от y .

ТригонометрияРаскрытие [tan(x + y)]

$$\rightarrow \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}$$

ТригонометрияРаскрытие [<Выражение>, <Функция цели>]

Эта команда преобразует тригонометрические выражения в выражения, в которых используются функции только простых переменных в качестве аргументов, отдавая предпочтение данной целевой функции.

Пример: выразить функцию $\tan(x+y)$ через $\tan(x)$ и $\tan(y)$.

ТригонометрияРаскрытие [tan(x + y), tan(x)]

$$\rightarrow \frac{\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(y)}{1 - \operatorname{tg}(x) \operatorname{tg}(y)}$$

Команда ТригонометрияРазложение

Синтаксис команды имеет вид:

ТригонометрияРазложение [<Выражение>]

Эта команда преобразует тригонометрические выражения, содержащие произведения тригонометрических функций, в выражения без произведений тригонометрических функций.

Пример: преобразовать выражение $\sin(x) \cos(3x) \sin(y)$ в выражение, не содержащее произведений тригонометрических функций.

ТригонометрияРазложение [sin(x) * cos(3x) * sin(y)]

$$\rightarrow \frac{1}{4} \cos(4x - y) - \frac{1}{4} \cos(4x + y) - \frac{1}{4} \cos(2x - y) + \frac{1}{4} \cos(2x + y)$$

Если исходное тригонометрическое выражение содержит сумму тригонометрических функций, то команда **ТригонометрияРазложение** [**<Выражение>**] преобразует (если возможно) это выражение к одной функции более сложного аргумента.

Пример:

ТригонометрияРазложение [sin(x) + cos(x)]

$$\rightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$$

ТригонометрияРазложение [<Выражение>, <Целевая функция>]

Эта команда преобразует тригонометрические выражения, содержащие произведения тригонометрических функций, в выражения без произведений тригонометрических функций, отдавая предпочтение данной целевой функции.

Пример: преобразовать выражение $\sin(x) + \cos(x)$ к синусу одного аргумента.

ТригонометрияРазложение [sin(x) + cos(x) , sin(x)]

$$\rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$$

Команда Разложения

Синтаксис команды имеет вид:

Разложения [<Многочлен>]

Эта команда раскладывает полином на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.

Пример: разложить полином $x^9 - x^8 - x + 1$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.

Разложения [$x^9 - x^8 - x + 1$]

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ x+1 & 1 \\ x^4+1 & 1 \\ x^4+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Замечание: полученные множители могут не быть неприводимыми над множеством целых чисел.

Разложения [<Число>]

Если в качестве аргумента команды Разложения указать натуральное число, то команда раскладывает его в произведение простых множителей (указывая степень каждого множителя).

Пример: разложить на простые множители число 55.

Разложения [55]

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}$$

Команда ТочкаПерегиба

Синтаксис команды имеет вид:

ТочкаПерегиба [<Полином>]

Эта команда находит точки перегиба функции, описываемой многочленом.

Пример: найти точки перегибов полинома x^3 .

ТочкаПерегиба [x^3]

→ **(0,0)**

Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Найти большее из чисел $\{0, -1\}$.
2. Найти большее из чисел $\{-2, 4, 0.3, 7/2\}$.
3. Найти меньшее из чисел $\{0, -1\}$.
4. Найти меньшее из чисел $\{-2, 4, 0.3, 7/2\}$.
5. Вычислить целую часть частного от деления 17 на 4.
6. Разделить многочлен $x^2 + 3x - 1$ на многочлен $x + 1$.
7. Найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел 17, 4.
8. Найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $x^2 + 3x - 1$ и $x + 1$.
9. Найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $3/12$ и $2/15$.
10. Найти наименьший общий знаменатель выражений $3 / (2x + 1)$ и $3 / (4x^2 + 4x + 1)$.
11. Выделить полный квадрат в $x^2 - 6x - 7$.
12. Разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^3 + x - 1$.
13. Вычислить количество всех положительных делителей, включая само число 1.
14. Найти все положительные делители числа 1.
15. Найти сумму всех положительных делителей числа 1.

16. Разложить число 64 на простые множители.
17. Разложить многочлены $x^2 + x - 12$ на множители.
18. Вычислить наибольший общий делитель двух чисел 12 и 18 .
19. Вычислить наибольший общий делитель чисел $14, 21, 28$.
20. Найти наибольший общий делитель двух многочленов $x^2 - 2x - 3, x^2 - 9$.
21. Найти наибольший общий делитель многочленов $x^2 + 4x + 4, x^2 - x - 6, x^2 + 5x + 6$.
22. вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел $14, 18$.
23. Вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел $10, 20, 22$.
24. Найти наименьшее общее кратное двух многочленов $x^2 - 2x - 3, x^2 - 9$.
25. Найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $x^2 - x - 6, x^2 - 7x + 12, x^2 - 6x + 9$.
26. Перевести в десятичную систему счисления число AC , записанное в шестнадцатеричной системе счисления.
27. Перевести в десятичную систему счисления число 10001 , записанное в двоичной системе счисления.
28. Перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 172 , записанное в десятичной системе счисления.
29. Перевести в двоичную систему счисления число 17 , записанное в десятичной системе счисления.
30. Найти наибольшее простое число, меньшее чем 999 .
31. найти наименьшее простое число, большее чем 999 .

32. Выяснить, являются ли числа 1 и 2 простыми.
33. Найти левую часть уравнения $2x-3 = 3x + 2$.
34. Найти список левых частей уравнений $x^2 + y^2 = z^2, x + 3 = 2x + 1$.
35. Найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $\{x^2 = y^2, x + 3 = 2x + 1, y + 1 = 2y^2 - y + 4\}, 1$.
36. Найти правую часть уравнения $2x-3 = 3x + 2$.
37. Найти список правых частей уравнений $\{x^2 + y^2 = z^2, x + 3 = 2x + 1\}, 2$.
38. Найти числитель функции $\frac{2x^3 + 3x^2}{x^2 + x^3}$
39. Найти числитель числа $\frac{2}{4} + \frac{5}{7}$
40. Упростить функцию $x, 2x, 4x$.
41. Упростить функцию $x + y + (x + y)^2$.
42. Упростить выражения $1 - \cos(x)^2$.
43. Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.
44. Преобразовать функцию $\cos(x-y)$ к выражению, содержащему функции только от x и только от y .
45. Преобразовать выражение $\sin(2x) \cos(2x) \sin(y)$ к выражению не содержащему произведений тригонометрических функций.
46. Преобразовать выражение $\sin(2x) + \cos(2x)$ к синусу одного аргумента.
47. Разложить полином $x^8 - x^7 - x + 1$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.
48. Разложить на простые множители число 112 .

49. Найти точки перегибов полинома x^3 .

Вариант 2

1. Найти большее из чисел $\{-4, 5\}$.
2. Найти большее из чисел $\{-2, 3, 0.3, 6/6\}$.
3. Найти меньшее из чисел $\{0.1, -1\}$.
4. Найти меньшее из чисел $\{-2, 3, 0.3, 6/6\}$.
5. Вычислить целую часть частного от деления 15 на 6 .
6. Разделить многочлен $2x^2 + 3x + 2$ на многочлен $2x + 1$.
7. Найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел $17, 4$.
8. Найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $x^2 - 7x + 12$ и $x + 1$.
9. Найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $2/9$ и $4/16$.
10. Найти наименьший общий знаменатель выражений $7/(3x)$ и $4/(x^3 + 1)$.
11. Выделить полный квадрат в $x^2 - 6x - 7$.
12. Разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^3 + x - 1$.
13. Вычислить количество всех положительных делителей, включая само число 2 .
14. Найти все положительные делители числа 2 .
15. Найти сумму всех положительных делителей числа 2 .

16. Разложить число 42 на простые множители.
17. Разложить многочлены $x^2 - 1$ на множители.
18. Вычислить наибольший общий делитель двух чисел 63 и 35.
19. Вычислить наибольший общий делитель чисел 1, 2, 3.
20. Найти наибольший общий делитель двух многочленов $x^2 + 3x + 2$, $x^2 - 1$.
21. Найти наибольший общий делитель многочленов $x^2 + 3x + 2$, $x^2 + 4x + 2$, $x^2 - 1$.
22. вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел 12, 14.
23. Вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел 6, 24, 28.
24. Найти наименьшее общее кратное двух многочленов $2x^2 + 5x + 2$, $x^2 - x - 6$.
25. Найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $2x^2 + 2$, $2x^2 - x - 1$, $x^2 - 1$.
26. Перевести в десятичную систему счисления число AB , записанное в шестнадцатеричной системе счисления.
27. Перевести в десятичную систему счисления число 0001, записанное в двоичной системе счисления.
28. Перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 111, записанное в десятичной системе счисления.
29. Перевести в двоичную систему счисления число 12 записанное в десятичной системе счисления.
30. Найти наибольшее простое число, меньшее чем 512.
31. найти наименьшее простое число, большее чем 512.

32. Выяснить, являются ли числа 2 и 3 простыми.
33. Найти левую часть уравнения $x^2 - 3x - 10 = 2x^2 + 5x + 2$.
34. Найти список левых частей уравнений $x^2 + y^2 + 1 = z^2$, $2x^2 + 3 = 3x^2 - 1$.
35. Найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $\{z^2 + 1 = y^2, x + 2 = 2x, y + 1 = 4\}$, 2.
36. Найти правую часть уравнения $2x^2 - 3 = 3x$.
37. Найти список правых частей уравнений $\{x^2 = x + 3, y^2 = 2y + 1, z + 1 = 2z^2 - z + 4\}$, 3.
38. Найти числитель функции $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1}$
39. Найти числитель числа $\frac{13}{12} + \frac{17}{11}$
40. Упростить функцию $x, 2x, x^2$.
41. Упростить функцию $x + y + 2(x + y)$.
42. Упростить выражения $\frac{\sin x}{\cos x}$.
43. Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.
44. Преобразовать функцию $\sin(x + y)$ к выражению, содержащему функции только от x и только от y .
45. Выразить функцию $\sin(x + y)$ через $\sin(y)$.
46. Преобразовать выражение $\sin(2x) \cos(2x)$ к выражению не содержащему произведений тригонометрических функций.
47. Преобразовать выражение $\sin(2x) + \cos(2x)$ к синусу одного аргумента.

48. Разложить полином $2x^2 + 2$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.
49. Разложить на простые множители число 78.
50. Найти точки перегибов полинома x^3 .

Вариант 3

1. Найти большее из чисел $\{6, -6\}$.
2. Найти большее из чисел $\{2, 4, 3.6, -7/2\}$.
3. Найти меньшее из чисел $\{2, -2\}$.
4. Найти меньшее из чисел $\{2, 4, 3.6, -7/2\}$.
5. Вычислить целую часть частного от деления 11 на 4.
6. Разделить многочлен $x^2 - 3x - 4$ на многочлен $x - 4$.
7. Найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел 19, 6.
8. Найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ и $x + 2$.
9. Найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $1/11$ и $3/22$.
10. Найти наименьший общий знаменатель выражений $7 / (3x^2 + 4x + 2)$ и $2 / (4x)$.
11. Выделить полный квадрат в $x^2 - 6x - 7$.
12. Разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^3 + x - 1$.
13. Вычислить количество всех положительных делителей, включая само число 3.

14. Найти все положительные делители числа 3.
15. Найти сумму всех положительных делителей числа 3.
16. Разложить число 88 на простые множители.
17. Разложить многочлены $x^2 - 2x + 1$ на множители.
18. Вычислить наибольший общий делитель двух чисел 20 и 36.
19. Вычислить наибольший общий делитель чисел 30, 21, 12.
20. Найти наибольший общий делитель двух многочленов $2x^2 + 5x + 2$, $2x^2 - x - 1$.
21. Найти наибольший общий делитель многочленов $2x^2 + 2$, $x^2 - x - 1$, $x^2 - 1$.
22. вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел 28, 14.
23. Вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел 10, 30, 50.
24. Найти наименьшее общее кратное двух многочленов $x^2 - 7x + 12$, $x^2 - 9x + 20$.
25. Найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $x^2 + 4x + 4$, $x^2 - x - 6$, $x^2 + 5x + 6$.
26. Перевести в десятичную систему счисления число 2A, записанное в шестнадцатеричной системе счисления.
27. Перевести в десятичную систему счисления число 0010, записанное в двоичной системе счисления.
28. Перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 9, записанное в десятичной системе счисления.

29. Перевести в двоичную систему счисления число 14, записанное в десятичной системе счисления.
30. Найти наибольшее простое число, меньшее чем 125.
31. найти наименьшее простое число, большее чем 125.
32. Выяснить, являются ли числа 3 и 5 простыми.
33. Найти левую часть уравнения $x^2 - x - 6 = x^2 - 7x + 12$.
34. Найти список левых частей уравнений $x^2 + 1 = 5$, $y + 3 = 3$.
35. Найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $\{z^2 + 1 = y^2, y + 1 = 4, x + 2 = 2x\}$, 3.
36. Найти правую часть уравнения $3x = x + 2$.
37. Найти список правых частей уравнений $\{z^2 = y^2 - 1, y - 1 = 2x, y + 2 = 4\}$, 1.
38. Найти числитель функции $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$
39. Найти числитель числа $\frac{8}{3} + \frac{5}{6}$
40. Упростить функцию $2x^3, 2x, 4x^3$.
41. Упростить функцию $x + (x + y)^3$.
42. Упростить выражения $\frac{\cos x}{\sin x}$.
43. Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.
44. Преобразовать функцию $\sin(x + y)$ к выражению, содержащему функции только от x и только от y .

45. Выразить функцию $\sin(x + y)$ через $\sin(y)$.
46. Преобразовать выражение $\cos(2x) \sin(y)$ к выражению не содержащему произведений тригонометрических функций.
47. Преобразовать выражение $\sin(2x) + \cos(2x)$ к синусу одного аргумента.
48. Разложить полином $x^4 + x^2 + 1$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.
49. Разложить на простые множители число 98.
50. Найти точки перегибов полинома x^3 .

Вариант 4

1. Найти большее из чисел $\{4, -5\}$.
2. Найти большее из чисел $\{-1, 2, 0.1, 1/2\}$.
3. Найти меньшее из чисел $\{11, 1.1\}$.
4. Найти меньшее из чисел $\{-1, 2, 0.1, 1/2\}$.
5. Вычислить целую часть частного от деления 27 на 9.
6. Разделить многочлен $x^2 - 1$ на многочлен $x - 1$.
7. Найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел 29, 9.
8. Найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $x^2 - 2x + 1$ и $x - 1$.
9. Найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $3/10$ и $2/15$.
10. Найти наименьший общий знаменатель выражений $1/(x^2)$ и $5/(2x + 3)$.

11. Выделить полный квадрат в $x^2 - 6x - 7$.
12. Разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^3 + x - 1$.
13. Вычислить количество всех положительных делителей, включая само число 4.
14. Найти все положительные делители числа 4.
15. Найти сумму всех положительных делителей числа 4.
16. Разложить число 90 на простые множители.
17. Разложить многочлены $x^2 - 7x + 12$ на множители.
18. Вычислить наибольший общий делитель двух чисел 18 и 24.
19. Вычислить наибольший общий делитель чисел 45, 54, 36.
20. Найти наибольший общий делитель двух многочленов $x^2 - 7x + 12$, $x^2 - x - 6$.
21. Найти наибольший общий делитель многочленов $x^2 - 2x - 8$, $x^2 - 3x - 10$, $2x^2 + 5x + 2$.
22. вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел 10, 6.
23. Вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел 40, 20, 14.
24. Найти наименьшее общее кратное двух многочленов $x^2 - 3x - 10$, $x^2 - 2x - 8$.
25. Найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $x^2 - 1$, $x^2 + 3x + 2$, $x^2 + 4x + 2$.
26. Перевести в десятичную систему счисления число $3B$, записанное в шестнадцатеричной системе счисления.

27. Перевести в десятичную систему счисления число 0000 , записанное в двоичной системе счисления.
28. Перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 100 , записанное в десятичной системе счисления.
29. Перевести в двоичную систему счисления число 67 , записанное в десятичной системе счисления.
30. Найти наибольшее простое число, меньшее чем 100 .
31. найти наименьшее простое число, большее чем 100 .
32. Выяснить, являются ли числа 4 и 5 простыми.
33. Найти левую часть уравнения многочленов $x^2 - 7x + 12 = x^2 - 9x + 20$.
34. Найти список левых частей уравнений $y^2 = 9, x + 3 = 2x + 2$.
35. Найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $\{y + 1 = 4, z^2 + 1 = y^2, x + 2 = 2x\}$, 1.
36. Найти правую часть уравнения $4x = x + 6$.
37. Найти список правых частей уравнений $\{z^2 + 1 = y^2, y + 1 = 4, x + 2 = 2x\}$, 2.
38. Найти числитель функции $\frac{3x^2 + 5x + 2}{2x + 1}$
39. Найти числитель числа $\frac{3}{2} + \frac{7}{11}$
40. Упростить функцию $2x, 3x$.
41. Упростить функцию $y + (x + y)$.
42. Упростить выражения $tg(x) \cdot ctg(x)$.

43. Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.
44. Преобразовать функцию $\sin(x - y)$ к выражению, содержащему функции только от x и только от y .
45. Выразить функцию $\sin(x - y)$ через $\sin(y)$.
46. Преобразовать выражение $\sin(2x) \sin(y)$ к выражению не содержащему произведений тригонометрических функций.
47. Преобразовать выражение $\sin(2x) + \cos(2x)$ к синусу одного аргумента.
48. Разложить полином $x^5 + x^4 + 1$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.
49. Разложить на простые множители число 124 .

Вариант 5

1. Найти большее из чисел $\{6, 5\}$
2. Найти большее из чисел $\{-3, -4, 3, 2\}$
3. Найти меньшее из чисел $\{4, -2\}$
4. Найти меньшее из чисел $\{-3, -4, 3, 2\}$
5. Вычислить целую часть частного от деления 27 на 3 .
6. Разделить многочлен $x^2 - 2x + 1$ на многочлен $x - 1$.
7. Найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел $31, 6$.
8. Найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $x^2 - 1$ и $x + 1$.

9. Найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $5/8$ и $3/14$.
10. Найти наименьший общий знаменатель выражений $11 / (x^2 - 3x - 4)$ и $8 / (3x)$.
11. Выделить полный квадрат в $x^2 - 6x - 7$.
12. Разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^3 + x - 1$.
13. Вычислить количество всех положительных делителей, включая само число 5.
14. Найти все положительные делители числа 5.
15. Найти сумму всех положительных делителей числа 5.
16. Разложить число 50 на простые множители.
17. Разложить многочлены $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ на множители.
18. Вычислить наибольший общий делитель двух чисел 14 и 56.
19. Вычислить наибольший общий делитель чисел 49, 42, 36.
20. Найти наибольший общий делитель двух многочленов $2x^2 - x - 1$, $x^2 - 1$.
21. Найти наибольший общий делитель многочленов $x^2 - 9x + 20$, $x^2 - 7x + 12$, $x^2 + 2x - 8$.
22. вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел 32, 20.
23. Вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел 11, 110, 55.
24. Найти наименьшее общее кратное двух многочленов $x^2 - 2x - 8$, $x^2 - 3x + 2$.

25. Найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $x^2 - 1, x^2 - x - 1, 2x^2 + 2$.
26. Перевести в десятичную систему счисления число $4C$, записанное в шестнадцатеричной системе счисления.
27. Перевести в десятичную систему счисления число 0100 , записанное в двоичной системе счисления.
28. Перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 102 , записанное в десятичной системе счисления.
29. Перевести в двоичную систему счисления число 9 , записанное в десятичной системе счисления.
30. Найти наибольшее простое число, меньшее чем 71 .
31. найти наименьшее простое число, большее чем 71 .
32. Выяснить, являются ли числа 7 и 10 простыми.
33. Найти левую часть уравнения $x^2 - x - 6 = x^2 + 5x + 6$.
34. Найти список левых частей уравнений $x^2, y^2 = z^2, 3x = x + 8$.
35. Найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $\{x^2 + 1 = y^2 - 1, x + 3 = 2x, y + 1 = 4\}, 2$.
36. Найти правую часть уравнения $5 - 3x = 3x^2 + 2x$.
37. Найти список правых частей уравнений $\{x + 2 = 2x, z^2 + 1 = y^2, y + 1 = 4\}, 1$.
38. Найти числитель функции $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$

39. Найти числитель числа $\frac{12}{21} + \frac{11}{10}$
40. Упростить функцию $12x, 2x^2, 4x, 4x^2$.
41. Упростить функцию $2x + y + 3(x + y)^2$.
42. Упростить выражения $\tan(x)^2 + 1$.
43. Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.
44. Преобразовать функцию $\cos(x-y)$ к выражению, содержащему функции только от x и только от y .
45. Выразить функцию $\cos(x-y)$ через $\cos(y)$.
46. Преобразовать выражение $\sin(2x) \sin(2x) \cos(2x)$ к выражению не содержащему произведений тригонометрических функций.
47. Преобразовать выражение $\sin(2x) + \cos(2x)$ к синусу одного аргумента.
48. Разложить полином $x^6 + x^5 + x + 1$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.
49. Разложить на простые множители число 66.

Вариант 6

1. Найти большее из чисел $\{-2, -3\}$.
2. Найти большее из чисел $\{1.5, 2.5, 3.3, 4\}$.
3. Найти меньшее из чисел $\{0.9, -1\}$.
4. Найти меньшее из чисел $\{1.5, 2.5, 3.3, 4\}$.
5. Вычислить целую часть частного от деления 26 на 6.

6. Разделить многочлен $x^2 - 7x + 12$ на многочлен $x - 3$.
7. Найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел $34, 8$.
8. Найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $x^2 - 3x - 4$ и $x + 1$.
9. Найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $3/12$ и $2/36$.
10. Найти наименьший общий знаменатель выражений $9/(x^2)$ и $7/(x + 1)$.
11. Выделить полный квадрат в $x^2 - 6x - 7$.
12. Разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^3 + x - 1$.
13. Вычислить количество всех положительных делителей, включая само число 6 .
14. Найти все положительные делители числа 6 .
15. Найти сумму всех положительных делителей числа 6 .
16. Разложить число 100 на простые множители.
17. Разложить многочлены $x^2 + 16x + 48$ на множители.
18. Вычислить наибольший общий делитель двух чисел 28 и 40 .
19. Вычислить наибольший общий делитель чисел $24, 32, 40$.
20. Найти наибольший общий делитель двух многочленов $x^2 - 2x - 8, x^2 + 3x + 2$.
21. Найти наибольший общий делитель многочленов $2x^2 + 5x + 2, x^2 - x - 6, x^2 - 3x - 10$.

22. вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел 35, 36.
23. Вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел 32, 20, 8.
24. Найти наименьшее общее кратное двух многочленов $2x^2 - x - 1$, $x^2 - 1$.
25. Найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $x^2 - 2x - 8$, $x^2 - 3x - 10$, $2x^2 + 5x + 2$.
26. Перевести в десятичную систему счисления число ED , записанное в шестнадцатеричной системе счисления.
27. Перевести в десятичную систему счисления число 10101 , записанное в двоичной системе счисления.
28. Перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 101 , записанное в десятичной системе счисления.
29. Перевести в двоичную систему счисления число 111 , записанное в десятичной системе счисления.
30. Найти наибольшее простое число, меньшее чем 102.
31. найти наименьшее простое число, большее чем 102.
32. Выяснить, являются ли числа 9 и 12 простыми.
33. Найти левую часть уравнения $2x^2 + 2 = 2x^2 - x - 1$.
34. Найти список левых частей уравнений $xy^2 = z^2$, $xy = 2$.
35. Найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $\{x^2 = x + 3, y^2 = 2y + 1, z + 1 = 2z^2 - z + 4\}$, 3.
36. Найти правую часть уравнения $3x^2 - x^3 = x - 12$.
37. Найти список правых частей уравнений $\{x^2 + y^2 = z^2, x + 3 = 2x + 1\}$, 2.

38. Найти числитель функции $\frac{x^2 + 1}{2x}$
39. Найти числитель числа $\frac{3}{4} + \frac{17}{11}$
40. Упростить функцию $x^3, 2x^2$.
41. Упростить функцию $x + z + (x + z)^2 + y$.
42. Упростить выражения $\operatorname{ctg}(x)^2 + 1$.
43. Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.
44. Преобразовать функцию $\tan(x - y)$ к выражению, содержащему функции только от x и только от y .
45. Выразить функцию $\tan(x - y)$ через $\tan(y)$.
46. Преобразовать выражение $\sin(2x) \sin(2x) \cos(2y)$ к выражению не содержащему произведений тригонометрических функций.
47. Преобразовать выражение $\sin(2x) + \cos(2x)$ к синусу одного аргумента.
48. Разложить полином $x^8 - x^7 - x + 1$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.
49. Разложить на простые множители число 128.

Вариант 7

1. Найти большее из чисел $\{-5, -1\}$.
2. Найти большее из чисел $\{5, 4, -4, -5\}$.
3. Найти меньшее из чисел $\{1, 0.9\}$.

4. Найти меньшее из чисел $\{3, 1, 4-, 2\}$.
5. Вычислить целую часть частного от деления 24 на 8.
6. Разделить многочлен $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ на многочлен $x + 3$.
7. Найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел 22, 3.
8. Найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $2x^2 + 3x + 2$ и $x + 1$.
9. Найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $8/20$ и $10/15$.
10. Найти наименьший общий знаменатель выражений $4 / (2x^2 + 5x + 2)$ и $10 / (x + 2)$.
11. Выделить полный квадрат в $x^2 - 6x - 7$.
12. Разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^3 + x - 1$.
13. Вычислить количество всех положительных делителей, включая само число 7.
14. Найти все положительные делители числа 7.
15. Найти сумму всех положительных делителей числа 7.
16. Разложить число 120 на простые множители.
17. Разложить многочлены $2x^2 + 5x + 2$ на множители.
18. Вычислить наибольший общий делитель двух чисел 45 и 35.
19. Вычислить наибольший общий делитель чисел 18, 27, 36.

20. Найти наибольший общий делитель двух многочленов $x^2 - 3x - 10$, $x^2 - 9x + 20$.
21. Найти наибольший общий делитель многочленов $x^2 - 9x + 20$, $x^2 - 2x - 8$, $x^2 - 7x + 12$.
22. вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел 2, 3.
23. Вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел 20, 16, 12.
24. Найти наименьшее общее кратное двух многочленов $x^2 + 3x + 2$, $x^2 - 1$.
25. Найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $x^2 - x - 6$, $2x^2 + 5x + 2$, $x^2 - 3x - 10$.
26. Перевести в десятичную систему счисления число $5E$, записанное в шестнадцатеричной системе счисления.
27. Перевести в десятичную систему счисления число 0111 , записанное в двоичной системе счисления.
28. Перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 222, записанное в десятичной системе счисления.
29. Перевести в двоичную систему счисления число 20, записанное в десятичной системе счисления.
30. Найти наибольшее простое число, меньшее чем 133.
31. найти наименьшее простое число, большее чем 133.
32. Выяснить, являются ли числа 10 и 11 простыми.
33. Найти левую часть уравнения $x^2 + 3x + 2 = 3x^2 + 2x + 4$.
34. Найти список левых частей уравнений $x^2 - 7x = x^2 - 2x$, $x^2 - 9x = x^2 - 9$.

35. Найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $\{z^2 = y^2 - 1, y - 1 = 2x, y + 2 = 4\}, 1$.
36. Найти правую часть уравнения $2x - 3 = 3x + 2$.
37. Найти список правых частей уравнений $\{x + 3 = 2x + 1, x^2 = y^2, y + 1 = 2y^2 - y + 4\}, 1$.
38. Найти числитель функции $\frac{x - 5}{2x^2 - 8x - 10}$
39. Найти числитель числа $\frac{14}{22} + \frac{7}{4}$
40. Упростить функцию $x^4, 4x^4$.
41. Упростить функцию $(x + y)^3 + y$.
42. Упростить выражения $2/(tg(x) + ctg(x))$.
43. Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.
44. Преобразовать функцию $\cos(x - y)$ к выражению, содержащему функции только от x и только от y .
45. Выразить функцию $\cos(x - y)$ через $\cos(y)$.
46. Преобразовать выражение $\cos(y) \sin(2x)$ к выражению не содержащему произведений тригонометрических функций.
47. Преобразовать выражение $\sin(2x) + \cos(2x)$ к синусу одного аргумента.
48. Разложить полином $x^8 - x^7 - x + 1$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.
49. Разложить на простые множители число 348.

Вариант 8

1. Найти большее из чисел $\{3, -5\}$.
2. Найти большее из чисел $\{9/3, 3, 3/9, 9\}$.
3. Найти меньшее из чисел $\{5, 0\}$.
4. Найти меньшее из чисел $\{9/3, 3, 3/9, 9\}$.
5. Вычислить целую часть частного от деления 18 на 2 .
6. Разделить многочлен $x^2 + 16x + 64$ на многочлен $x + 12$.
7. Найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел $19, 9$.
8. Найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $x^2 + 16x + 64$ и $x + 1$.
9. Найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $6/13$ и $4/39$.
10. Найти наименьший общий знаменатель выражений $8 / (3x - 2)$ и $5 / (x^2 + 3x + 1)$.
11. Выделить полный квадрат в $x^2 - 6x - 7$.
12. Разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^3 + x - 1$.
13. Вычислить количество всех положительных делителей, включая само число 8 .
14. Найти все положительные делители числа 8 .
15. Найти сумму всех положительных делителей числа 8 .
16. Разложить число 80 на простые множители.

17. Разложить многочлены $x^2 - 3x - 4$ на множители.
18. Вычислить наибольший общий делитель двух чисел 48 и 42.
19. Вычислить наибольший общий делитель чисел 46, 40, 24.
20. Найти наибольший общий делитель двух многочленов $x^2 - 2x - 8$, $2x^2 + 5x + 2$.
21. Найти наибольший общий делитель многочленов $2x^2 + 2$, $x^2 - 1$, $2x^2 - x - 1$.
22. вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел 16, 28.
23. Вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел 4, 6, 8.
24. Найти наименьшее общее кратное двух многочленов $2x^2 + 5x + 2$, $2x^2 - x - 1$.
25. Найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $x^2 + 4x + 2$, $x^2 + 3x + 2$, $x^2 - 1$.
26. Перевести в десятичную систему счисления число ACD , записанное в шестнадцатеричной системе счисления.
27. Перевести в десятичную систему счисления число 1111 , записанное в двоичной системе счисления.
28. Перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 10 , записанное в десятичной системе счисления.
29. Перевести в двоичную систему счисления число 65 , записанное в десятичной системе счисления.
30. Найти наибольшее простое число, меньшее чем 10 .
31. найти наименьшее простое число, большее чем 10 .

32. Выяснить, являются ли числа 11 и 13 простыми.
33. Найти левую часть уравнения $2x^2 - 3 = 3x$.
34. Найти список левых частей уравнений $y + 5 = 6$, $x + 3 = 4$.
35. Найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $\{z^2 + 1 = y^2, y + 1 = 4, x + 2 = 2x\}$, 2.
36. Найти правую часть уравнения $x + 3 = 2x - 1$.
37. Найти список правых частей уравнений $\{y + 1 = 4, z^2 + 1 = y^2, x + 2 = 2x\}$, 1.
38. Найти числитель функции $\frac{2x^2 + 2}{2x + 2}$
39. Найти числитель числа $\frac{1}{2} + \frac{18}{16}$
40. Упростить функцию $x, 3x, 4x$.
41. Упростить функцию $x + 2y + (x + 2y)$.
42. Упростить выражения $2/(tg(x) + ctg(x))$.
43. Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.
44. Преобразовать функцию $ctg(x + y)$ к выражению, содержащему функции только от x и только от y .
45. Выразить функцию $ctg(x + y)$ через $ctg(y)$.
46. Преобразовать выражение $\cos(y) \sin(2x) \sin(2y)$ к выражению не содержащему произведений тригонометрических функций.
47. Преобразовать выражение $\sin(2x) + \cos(2x)$ к синусу одного аргумента.

48. Разложить полином $x^8 - x^7 - x + 1$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.

49. Разложить на простые множители число 516.

Вариант 9

1. Найти большее из чисел $\{3, -3\}$.

2. Найти большее из чисел $\{-3, -4, 2, 2\}$.

3. Найти меньшее из чисел $\{0, -3\}$.

4. Найти меньшее из чисел $\{-3, -4, 2, 2\}$.

5. Вычислить целую часть частного от деления 20 на 6.

6. Разделить многочлен $x^2 + 16x + 64$ на многочлен $x + 1$.

7. Найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел 26, 5.

8. Найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $x^2 + 16x + 64$ и $x + 12$.

9. Найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $15/3$ и $2/33$.

10. Найти наименьший общий знаменатель выражений $6/(1 - x)$ и $5/(x + 1)$.

11. Выделить полный квадрат в $x^2 - 6x - 7$.

12. Разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^3 + x - 1$.

13. Вычислить количество всех положительных делителей, включая само число 9.

14. Найти все положительные делители числа 9.
15. Найти сумму всех положительных делителей числа 9.
16. Разложить число 140 на простые множители.
17. Разложить многочлены $x^2 + 16x + 64$ на множители.
18. Вычислить наибольший общий делитель двух чисел 12 и 18.
19. Вычислить наибольший общий делитель чисел 42, 30, 18.
20. Найти наибольший общий делитель двух многочленов $x^2 - 9x + 20$, $x^2 - 7x + 12$.
21. Найти наибольший общий делитель многочленов $x^2 - x - 6$, $x^2 + 4x + 4$, $x^2 + 5x + 6$.
22. вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел 24, 36.
23. Вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел 18, 28, 2.
24. Найти наименьшее общее кратное двух многочленов $x^2 - x - 6$, $2x^2 + 5x + 2$.
25. Найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $2x^2 + 2$, $x^2 - 1$, $x^2 - x - 1$.
26. Перевести в десятичную систему счисления число $E1F$, записанное в шестнадцатеричной системе счисления.
27. Перевести в десятичную систему счисления число 0010 , записанное в двоичной системе счисления.
28. Перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 7, записанное в десятичной системе счисления.

29. Перевести в двоичную систему счисления число 128, записанное в десятичной системе счисления.
30. Найти наибольшее простое число, меньшее чем 12.
31. найти наименьшее простое число, большее чем 12.
32. Выяснить, являются ли числа 12 и 15 простыми.
33. Найти левую часть уравнения $x^2 = x + 1$.
34. Найти список левых частей уравнений $x^2 + 12 = 16$, $y^2 + 7 = 16$.
35. Найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $\{x^2 = y^2, x + 3 = 2x + 1, y + 1 = 2y^2 - y + 4\}$, 3.
36. Найти правую часть уравнения $x^2 - 3x - 10 = 2x^2 + 5x + 2$.
37. Найти список правых частей уравнений $x^2 + y^2 = z^2$, $x + 3 = 2x + 1$.
38. Найти числитель функции $\frac{3x^2 + 2x - 6}{x^2 + x^3}$
39. Найти числитель числа $\frac{4}{1} + \frac{22}{12}$
40. Упростить функцию $x + 2x^2$.
41. Упростить функцию $z + 2y + (2z + y)^2$.
42. Упростить выражения $2 \cdot \text{ctg}(x)/(1 + \text{ctg}(x)^2)$.
43. Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.
44. Преобразовать функцию $\sin(x - y)$ к выражению, содержащему функции только от x и только от y .
45. Выразить функцию $\text{tg}(x+y)$ через $\text{tg}(y)$.

46. Преобразовать выражение $\cos(y) \cdot \tan(2x) \cdot \sin(2y)$ к выражению не содержащему произведений тригонометрических функций.
47. Преобразовать выражение $\sin(2x) + \cos(2x)$ к синусу одного аргумента.
48. Разложить полином $x^8 - x^7 - x + 1$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.
49. Разложить на простые множители число 666.
50. Найти точки перегибов полинома x^3 .

Вариант 10

1. Найти большее из чисел $\{3, -2\}$.
2. Найти большее из чисел $\{1.9, 0.9, -9, 9/2\}$.
3. Найти меньшее из чисел $\{1, -5\}$.
4. Найти меньшее из чисел $\{1.9, 0.9, -9, 9/2\}$.
5. Вычислить целую часть частного от деления 21 на 7.
6. Разделить многочлен $2x^2 + 3x + 2$ на многочлен $x + 2$.
7. Найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел 23, 7.
8. Найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ и $x + 3$.
9. Найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $18/36$ и $12/12$.
10. Найти наименьший общий знаменатель выражений $7/(2x)$ и $4/(x+1)$.
11. Выделить полный квадрат в $x^2 - 6x - 7$.

12. Разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^3 + x - 1$.
13. Вычислить количество всех положительных делителей, включая само число 10 .
14. Найти все положительные делители числа 10 .
15. Найти сумму всех положительных делителей числа 10 .
16. Разложить число 120 на простые множители.
17. Разложить многочлены $x^2 + 3x + 1$ на множители.
18. Вычислить наибольший общий делитель двух чисел 72 и 56 .
19. Вычислить наибольший общий делитель чисел 20 , 16 , 12 .
20. Найти наибольший общий делитель двух многочленов $x^2 - 1$, $2x^2 - x - 1$.
21. Найти наибольший общий делитель многочленов $x^2 + 3x + 2$, $x^2 - 1$, $x^2 + 4x + 2$.
22. вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел 33 , 76 .
23. Вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел 24 , 32 , 4 .
24. Найти наименьшее общее кратное двух многочленов $x^2 + 3x + 2$, $x^2 - 2x - 8$.
25. Найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $x^2 - 3x - 10$, $x^2 - 2x - 8$, $2x^2 + 5x + 2$.
26. Перевести в десятичную систему счисления число $10B$, записанное в шестнадцатеричной системе счисления.
27. Перевести в десятичную систему счисления число 0111 , записанное в двоичной системе счисления.

28. Перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 126, записанное в десятичной системе счисления.
29. Перевести в двоичную систему счисления число 127, записанное в десятичной системе счисления.
30. Найти наибольшее простое число, меньшее чем 18.
31. найти наименьшее простое число, большее чем 18.
32. Выяснить, являются ли числа 12 и 13 простыми.
33. Найти левую часть уравнения $3x = x + 2$.
34. Найти список левых частей уравнений $x^2 + y^2 = z^2 + 2$, $y + 3 = 2y + 1$.
35. Найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $\{x + 2 = 2x, z^2 + 1 = y^2, y + 1 = 4\}$, 1.
36. Найти правую часть уравнения $x^2 - x - 6 = x^2 - 7x + 12$.
37. Найти список правых частей уравнений $\{x^2 + 1 = y^2 - 1, x + 3 = 2x, y + 1 = 4\}$, 2.
38. Найти числитель функции $\frac{x^2 + x^3}{x - 1}$
39. Найти числитель числа $\frac{5}{6} + \frac{7}{8}$
40. Упростить функцию $x^3, 4x, x^3$.
41. Упростить функцию $x + 5 + (x + y)^2$.
42. Упростить выражения $\cos(x)^2 - \sin(x)^2$.
43. Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.

44. Преобразовать функцию $\cos(x-y)$ к выражению, содержащему функции только от x и только от y .
45. Выразить функцию $\cos(x-y)$ через $\cos(y)$.
46. Преобразовать выражение $\cos(2y) \tan(x) \sin(y)$ к выражению не содержащему произведений тригонометрических функций.
47. Преобразовать выражение $\sin(2x) + \cos(2x)$ к синусу одного аргумента.
48. Разложить полином $x^8 - x^7 - x + 1$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.
49. Разложить на простые множители число 798.
50. Найти точки перегибов полинома x^3 .

Вариант 11

1. Найти большее из чисел $\{1, -2\}$.
2. Найти большее из чисел $\{-3, 5, 0.4, 7/3\}$.
3. Найти меньшее из чисел $\{2, 6\}$.
4. Найти меньшее из чисел $\{-3, 5, 0.4, 7/3\}$.
5. Вычислить целую часть частного от деления 13 на 3.
6. Разделить многочлен $x^2 - 3x - 4$ на многочлен $x - 3$.
7. Найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел 13, 3.
8. Найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $x^2 - 7x + 12$ и $x + 1$.

9. Найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $24/1$ и $2/11$.
10. Найти наименьший общий знаменатель выражений $2 / (x^2 + 16x + 48)$ и $6 / (x)$.
11. Выделить полный квадрат в $x^2 - 6x - 7$.
12. Разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^3 + x - 1$.
13. Вычислить количество всех положительных делителей, включая само число 11 .
14. Найти все положительные делители числа 11 .
15. Найти сумму всех положительных делителей числа 11 .
16. Разложить число 200 на простые множители.
17. Разложить многочлены $x^2 + 1$ на множители.
18. Вычислить наибольший общий делитель двух чисел 12 и 48 .
19. Вычислить наибольший общий делитель чисел $32, 20, 8$.
20. Найти наибольший общий делитель двух многочленов $x^2 - 3x + 2, x^2 - 2x - 8$.
21. Найти наибольший общий делитель многочленов $x^2 - x - 1, 2x^2 + 2, x^2 - 1$.
22. вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел $42, 44$.
23. Вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел $24, 3, 36$.
24. Найти наименьшее общее кратное двух многочленов $2x^2 - x - 1, x^2 - 1$.

25. Найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $x^2 - 9x + 20$, $x^2 - 7x + 12$, $x^2 + 2x - 8$.
26. Перевести в десятичную систему счисления число $8C$, записанное в шестнадцатеричной системе счисления.
27. Перевести в десятичную систему счисления число 1110 , записанное в двоичной системе счисления.
28. Перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 14 , записанное в десятичной системе счисления.
29. Перевести в двоичную систему счисления число 255 , записанное в десятичной системе счисления.
30. Найти наибольшее простое число, меньшее чем 37 .
31. найти наименьшее простое число, большее чем 37 .
32. Выяснить, являются ли числа 14 и 15 простыми.
33. Найти левую часть уравнения $4x = x + 6$.
34. Найти список левых частей уравнений $y^2 + 5 = 6$, $x + 3 = 5$.
35. Найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $\{ x + 2 = 2x, z^2 + 1 = y^2, y + 1 = 4 \}$, 2.
36. Найти правую часть уравнения $x^2 - 7x + 12 = x^2 - 9x + 20$.
37. Найти список правых частей уравнений $\{ y + 1 = 4, z^2 + 1 = y^2, x + 2 = 2x \}$, 2.
38. Найти числитель функции $\frac{x - 4}{x^2 - 2x - 8}$
39. Найти числитель числа $\frac{12}{8} + \frac{6}{24}$

40. Упростить функцию $x^1 + 2x + 4x^1$.
41. Упростить функцию $x + 2z + (x + 2z)^2$.
42. Упростить выражения $1 - 2 \cdot \sin(x)^2$.
43. Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.
44. Преобразовать функцию $\operatorname{tg}(x - y)$ к выражению, содержащему функции только от x и только от y .
45. Выразить функцию $\operatorname{tg}(x - y)$ через $\operatorname{tg}(y)$.
46. Преобразовать выражение $\sin(x) \tan(x) \sin(y)$ к выражению не содержащему произведений тригонометрических функций.
47. Преобразовать выражение $\sin(2x) + \cos(2x)$ к синусу одного аргумента.
48. Разложить полином $x^8 - x^7 - x + 1$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.
49. Разложить на простые множители число 840.
50. Найти точки перегибов полинома x^3 .

Вариант 12

1. Найти большее из чисел $\{2, -1\}$.
2. Найти большее из чисел $\{12/4, 4, 8/4, 7/2\}$.
3. Найти меньшее из чисел $\{0, 1\}$.
4. Найти меньшее из чисел $\{12/4, 4, 8/4, 7/2\}$.
5. Вычислить целую часть частного от деления 11 на 2.

6. Разделить многочлен $x^2 - 1$ на многочлен $x + 1$.
7. Найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел $10, 3$.
8. Найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $x^2 - 2x + 1$ и $x - 1$.
9. Найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $7/8$ и $20/28$.
10. Найти наименьший общий знаменатель выражений $5 / (x + 31)$ и $2 / (x^2 + 16x + 64)$.
11. Выделить полный квадрат в $x^2 - 6x - 7$.
12. Разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^3 + x - 1$.
13. Вычислить количество всех положительных делителей, включая само число 12 .
14. Найти все положительные делители числа 12 .
15. Найти сумму всех положительных делителей числа 12 .
16. Разложить число 222 на простые множители.
17. Разложить многочлены $2x^2 + 5x + 2$ на множители.
18. Вычислить наибольший общий делитель двух чисел 42 и 36 .
19. Вычислить наибольший общий делитель чисел $35, 21, 14$.
20. Найти наибольший общий делитель двух многочленов $x^2 - 3x - 10, x^2 - 2x - 8$.
21. Найти наибольший общий делитель многочленов $2x^2 + 5x + 2, x^2 - 2x - 8, x^2 - 3x - 10$.

22. вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел $10, 30$.
23. Вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел $30, 6, 12$.
24. Найти наименьшее общее кратное двух многочленов $x^2 - 7x + 12, x^2 - x - 6$.
25. Найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $x^2 - 3x - 10, 2x^2 + 5x + 2, x^2 - x - 6$.
26. Перевести в десятичную систему счисления число ADF , записанное в шестнадцатеричной системе счисления.
27. Перевести в десятичную систему счисления число 1101 записанное в двоичной системе счисления.
28. Перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 15 , записанное в десятичной системе счисления.
29. Перевести в двоичную систему счисления число 15 , записанное в десятичной системе счисления.
30. Найти наибольшее простое число, меньшее чем 42 .
31. найти наименьшее простое число, большее чем 42 .
32. Выяснить, являются ли числа 2 и 12 простыми.
33. Найти левую часть уравнения $5 - 3x = 3x^2 + 2x$.
34. Найти список левых частей уравнений $x^2 = z^2, y^2 = b^2$.
35. Найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $\{ y + 1 = 4, z^2 + 1 = y^2, x + 2 = 2x \}, 3$.
36. Найти правую часть уравнения $x^2 - x - 6 = x^2 + 5x + 6$.
37. Найти список правых частей уравнений $x^2 + y^2 = z^2, x + 3 = 2x + 1$.

38. Найти числитель функции $\frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$
39. Найти числитель числа $\frac{26}{13} + \frac{1}{10}$
40. Упростить функцию $x, 3x$.
41. Упростить функцию $x^2 + y + (x + y)^2$.
42. Упростить выражения $tg(x) \cdot ctg(x)$.
43. Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.
44. Преобразовать функцию $ctg(x - y)$ к выражению, содержащему функции только от x и только от y .
45. Выразить функцию $ctg(x - y)$ через $ctg(y)$.
46. Преобразовать выражение $\sin(2x) \cos(2x)$ к выражению не содержащему произведений тригонометрических функций.
47. Преобразовать выражение $\sin(2x) + \cos(2x)$ к синусу одного аргумента.
48. Разложить полином $x^8 - x^7 - x + 1$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.
49. Разложить на простые множители число 945.
50. Найти точки перегибов полинома x^3 .

Вариант 13

1. Найти большее из чисел $\{1, -1\}$.
2. Найти большее из чисел $\{-0.9, 1, -0.1, 0.9\}$.

3. Найти меньшее из чисел $\{8, -9\}$.
4. Найти меньшее из чисел $\{-0.9, 1, -0.1, 0.9\}$.
5. Вычислить целую часть частного от деления 42 на 8.
6. Разделить многочлен $x^2 - 2x + 1$ на многочлен $x - 1$.
7. Найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел 30, 7.
8. Найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $x^2 - 1$ и $x - 4$.
9. Найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $6/9$ и $10/12$.
10. Найти наименьший общий знаменатель выражений $4/(x + 3)$ и $1/(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$.
11. Выделить полный квадрат в $x^2 - 6x - 7$.
12. Разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^3 + x - 1$.
13. Вычислить количество всех положительных делителей, включая само число 13.
14. Найти все положительные делители числа 13.
15. Найти сумму всех положительных делителей числа 13.
16. Разложить число 212 на простые множители.
17. Разложить многочлены $x^2 + 4x + 3$ на множители.
18. Вычислить наибольший общий делитель двух чисел 32 и 28.
19. Вычислить наибольший общий делитель чисел 10, 30, 50.

20. Найти наибольший общий делитель двух многочленов $x^2 - 7x + 12$, $x^2 - 9x + 20$.
21. Найти наибольший общий делитель многочленов $x^2 + 2x - 8$, $x^2 - 7x + 12$, $x^2 - 9x + 20$.
22. вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел 4, 6.
23. Вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел 45, 5, 15.
24. Найти наименьшее общее кратное двух многочленов $2x^2 + 5x + 2$, $2x^2 - x - 1$.
25. Найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $x^2 - x - 6$, $x^2 - 7x + 12$, $x^2 - 6x + 9$.
26. Перевести в десятичную систему счисления число 2AC, записанное в шестнадцатеричной системе счисления.
27. Перевести в десятичную систему счисления число 1010, записанное в двоичной системе счисления.
28. Перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 25, записанное в десятичной системе счисления.
29. Перевести в двоичную систему счисления число 7, записанное в десятичной системе счисления.
30. Найти наибольшее простое число, меньшее чем 53.
31. найти наименьшее простое число, большее чем 53.
32. Выяснить, являются ли числа 3 и 13 простыми.
33. Найти левую часть уравнения $3x^2 - x^3 = x - 12$.
34. Найти список левых частей уравнений $x - 8 = 2$, $x + 7 = 8$.

35. Найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $\{x^2 = x + 3, y^2 = 2y + 1, z + 1 = 2z^2 - z + 4\}, 1$.
36. Найти правую часть уравнения $2x^2 + 2 = 2x^2 - x - 1$.
37. Найти список правых частей уравнений $\{z^2 = y^2 - 1, y - 1 = 2x, y + 2 = 4\}, 2$.
38. Найти числитель функции $\frac{2x^2 - 8x - 10}{2x + 2}$
39. Найти числитель числа $\frac{20}{2} + \frac{6}{18}$
40. Упростить функцию $x + 2x^1$.
41. Упростить функцию $x + y^2 + (x + y)^2$.
42. Упростить выражения $2/(tg(x) + ctg(x))$.
43. Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.
44. Преобразовать функцию $\cos(x-y)$ к выражению, содержащему функции только от x и только от y .
45. Выразить функцию $\cos(x-y)$ через $\cos(y)$.
46. Преобразовать выражение $\cos(2x) \sin(y)$ к выражению не содержащему произведений тригонометрических функций.
47. Преобразовать выражение $\sin(2x) + \cos(2x)$ к синусу одного аргумента.
48. Разложить полином $x^8 - x^7 - x + 1$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.
49. Разложить на простые множители число 1000 .
50. Найти точки перегибов полинома x^3 .

Вариант 14

1. Найти большее из чисел $\{0, -2\}$.
2. Найти большее из чисел $\{1.1, -1, 1.2, 1\}$.
3. Найти меньшее из чисел $\{11, -11\}$.
4. Найти меньшее из чисел $\{1.1, -1, 1.2, 1\}$.
5. Вычислить целую часть частного от деления 28 на 5.
6. Разделить многочлен $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ на многочлен $x + 2$.
7. Найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел 22, 5.
8. Найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $x^2 - 3x - 4$ и $x + 1$.
9. Найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $14/38$ и $16/19$.
10. Найти наименьший общий знаменатель выражений $2 / (x^2 - 7x + 12)$ и $3 / (x - 4)$.
11. Выделить полный квадрат в $x^2 - 6x - 7$.
12. Разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^3 + x - 1$.
13. Вычислить количество всех положительных делителей, включая само число 14.
14. Найти все положительные делители числа 14.
15. Найти сумму всех положительных делителей числа 14.

16. Разложить число 122 на простые множители.
17. Разложить многочлены $x^2 + 16x + 64$ на множители.
18. Вычислить наибольший общий делитель двух чисел 35 и 10.
19. Вычислить наибольший общий делитель чисел 56, 24, 28.
20. Найти наибольший общий делитель двух многочленов $2x^2 + 5x + 2$, $x^2 - x - 6$.
21. Найти наибольший общий делитель многочленов $x^2 - 3x - 10$, $x^2 - x - 6$, $2x^2 + 5x + 2$.
22. вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел 7, 9.
23. Вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел 1, 2, 3.
24. Найти наименьшее общее кратное двух многочленов $x^2 - 2x - 3$, $x^2 - 9$.
25. Найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $x^2 - 2x - 8$, $x^2 - 9x + 20$, $x^2 - 7x + 12$.
26. Перевести в десятичную систему счисления число $6B$, записанное в шестнадцатеричной системе счисления.
27. Перевести в десятичную систему счисления число 0101 , записанное в двоичной системе счисления.
28. Перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 80, записанное в десятичной системе счисления.
29. Перевести в двоичную систему счисления число 16, записанное в десятичной системе счисления.
30. Найти наибольшее простое число, меньшее чем 62.
31. найти наименьшее простое число, большее чем 62.

32. Выяснить, являются ли числа 4 и 14 простыми.
33. Найти левую часть уравнения $x + 3 = 2x - 1$.
34. Найти список левых частей уравнений $x^2 + y^2 = x + 1$, $x + 4 = 2x + 1$.
35. Найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $\{ y + 1 = 4, z^2 + 1 = y^2, x + 2 = 2x \}$, 2.
36. Найти правую часть уравнения $x^2 + 3x + 2 = 3x^2 + 2x + 4$.
37. Найти список правых частей уравнений $\{ x + 2 = 2x, z^2 + 1 = y^2, y + 1 = 4 \}$, 2.
38. Найти числитель функции $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$
39. Найти числитель числа $\frac{30}{2} + \frac{15}{5}$
40. Упростить функцию x, x^2, x, x^2 .
41. Упростить функцию $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.
42. Упростить выражения $1 - \cos(x)^2$.
43. Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.
44. Преобразовать функцию $\sin(x + y)$ к выражению, содержащему функции только от x и только от y .
45. Выразить функцию $\sin(x + y)$ через $\sin(y)$.
46. Преобразовать выражение $\sin(2x) \sin(y)$ к выражению не содержащему произведений тригонометрических функций.
47. Преобразовать выражение $\sin(2x) + \cos(2x)$ к синусу одного аргумента.

48. Разложить полином $x^8 - x^7 - x + 1$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.
49. Разложить на простые множители число 962.
50. Найти точки перегибов полинома x^3 .

Вариант 15

1. Найти большее из чисел $\{2, -1\}$.
2. Найти большее из чисел $\{3.1, 4, -3.3, 7/2\}$.
3. Найти меньшее из чисел $\{10, 0.1\}$.
4. Найти меньшее из чисел $\{3.1, 4, -3.3, 7/2\}$.
5. Вычислить целую часть частного от деления 32 на 4.
6. Разделить многочлен $x^2 - 7x + 12$ на многочлен $x + 1$.
7. Найти целую часть частного и остаток от деления двух чисел 18, 4.
8. Найти целую часть частного и остаток от деления двух многочленов $2x^2 + 3x + 2$ и $2x + 1$.
9. Найти наименьший общий знаменатель двух рациональных чисел $10/20$ и $30/40$.
10. Найти наименьший общий знаменатель выражений $1 / (x + 2)$ и $2 / (2x^2 + 5x + 2)$.
11. Выделить полный квадрат в $x^2 - 6x - 7$.
12. Разложить многочлен на множители над множеством иррациональных чисел $x^3 + x - 1$.

13. Вычислить количество всех положительных делителей, включая само число 15 .
14. Найти все положительные делители числа 15 .
15. Найти сумму всех положительных делителей числа 15 .
16. Разложить число 184 на простые множители.
17. Разложить многочлены $x^2 - 7x + 12$ на множители.
18. Вычислить наибольший общий делитель двух чисел 21 и 18 .
19. Вычислить наибольший общий делитель чисел $36, 48, 12$.
20. Найти наибольший общий делитель двух многочленов $x^2 - 2x - 3, x^2 - 9$.
21. Найти наибольший общий делитель многочленов $x^2 - 7x + 12, x^2 - 2x - 8, x^2 - 9x + 20$.
22. вычислить наименьшее общее кратное двух натуральных чисел $17, 34$.
23. Вычислить наименьшее общее кратное натуральных чисел $14, 21, 7$.
24. Найти наименьшее общее кратное двух многочленов $x^2 + 3x + 2, x^2 - 1$.
25. Найти наименьшее общее кратное многочленов "полиномов" в списке $x^2 - 1, 2x^2 - x - 1, 2x^2 + 2$.
26. Перевести в десятичную систему счисления число F , записанное в шестнадцатеричной системе счисления.
27. Перевести в десятичную систему счисления число 10101 , записанное в двоичной системе счисления.
28. Перевести в шестнадцатеричную систему счисления число 120 , записанное в десятичной системе счисления.

29. Перевести в двоичную систему счисления число 12, записанное в десятичной системе счисления.
30. Найти наибольшее простое число, меньшее чем 74.
31. найти наименьшее простое число, большее чем 74.
32. Выяснить, являются ли числа 6 и 15 простыми.
33. Найти левую часть уравнения $2x - 1 = x + 2$.
34. Найти список левых частей уравнений $x^2 + y^2 = z^2$, $x + 3 = 2x + 1$.
35. Найти левую часть второго уравнения из следующего списка уравнений $\{z^2 + 1 = y^2, y + 1 = 4, x + 2 = 2x\}$, 3.
36. Найти правую часть уравнения $x^2 = x + 1$.
37. Найти список правых частей уравнений $\{y + 1 = 4, z^2 + 1 = y^2, x + 2 = 2x\}$, 3.
38. Найти числитель функции $\frac{x^2 + x^3}{x^3 + x^2}$
39. Найти числитель числа $\frac{16}{6} + \frac{18}{9}$
40. Упростить функцию $x + 2x^2$.
41. Упростить функцию $x + xy + y(x + y)^2$.
42. Упростить выражения $\frac{\sin x}{\cos x}$.
43. Упростить выражения $\sin(x)^2 - \cos(x)^2 + 1$.
44. Преобразовать функцию $\operatorname{tg}(x - y)$ к выражению, содержащему функции только от x и только от y .

45. Выразить функцию $tg(x - y)$ через $tg(y)$.
46. Преобразовать выражение $\sin(2x) \sin(2x) \cos(2x)$ к выражению не содержащему произведений тригонометрических функций.
47. Преобразовать выражение $\sin(2x) + \cos(2x)$ к синусу одного аргумента.
48. Разложить полином $x^8 - x^7 - x + 1$ на неприводимые полиномы над множеством целыми чисел.
49. Разложить на простые множители число 1024 .
50. Найти точки перегибов полинома x^3 .

Заключение

В квалификационной работе:

- приведено описание изучаемых команд *GeoGebra* по теме алгебраические вычисления и преобразования;
- приведены примеры решения практических заданий с подробным пошаговым описанием действия команд *GeoGebra* на конкретных примерах; эти задания предназначены для выполнения студентами под руководством преподавателя;
- приведено 15 вариантов контрольных заданий, в которых 51 задач для самостоятельного выполнения студентами.

Литература

1. <http://www.geogebra.org/cms/>
2. <http://ru.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>
3. [http://ru.wikipedia.org/wiki/ Исследование_функции](http://ru.wikipedia.org/wiki/Исследование_функции)
4. <http://www.slideshare.net/marinmets/geogebra-1962501>
5. <http://matematika88888.blogspot.com/2009/07/geogebra.html>
6. <http://shperk.ru/friends/2009/09/rukovodstvo-dlya-nachinayushhix-izuchat-programmu-geogebra/>
7. <http://alexlarin.com/viewtopic.php?f=16&t=670>
8. <http://marinmets.blogspot.com/2010/02/geogebra.html>