МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им.В.П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: алгебры, геометрии и методики их преподавания

ДЕТТЕРЕР ЕКАТЕРИНА ЕВГЕНЬЕВНА

Магистерская диссертация

Тема: **МЕТОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АНИМАЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФУНКЦИЙ В 7-9 КЛАССАХ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ**

Направление подготовки: 44.04.01 Педагогическое образование

Магистерская программа: Информационные технологии в математическом образовании

Допускаю к защите:
Заведующий кафедрой
д.п.н., профессор Майер В.Р.

«____» ______2017г. ____________
дата подпись

Руководитель магистерской программы
д.п.н., профессор Майер В.Р.

«____» ______2017г. ____________
дата подпись

Научный руководитель
к.ф.-м.н., профессор Ларин С.В.

«___» _______2017г. ____________
дата подпись

Обучающийся: Деттерер Е.Е.

«____» ______2017г. ____________
дата подпись

Красноярск, 2017

Оглавление

Введение

Информационные технологии становятся неотъемлемой составляющей современного общества, что влечёт за собой их применение во всех сферах в жизни, в том числе и в образовании.

Использование компьютера в учебном процессе способствует активизации познавательной деятельности учащихся, стимулирует и развивает психические процессы, мышление, восприятие, память, и, как следствие, способствует формированию универсальных учебных действий, о которых говорится в Федеральных государственных образовательных стандартах (ФГОС) общего образования.

Кроме того, применение информационных технологий в математике позволяют учителю смоделировать те процессы, которые трудно представить обучаемому. Компьютерное математическое моделирование открывает огромные возможности, как в познавательном плане, так и для связи математики с другими науками.

Функциональная линия – основной стержень, который проходит от арифметики до высших разделов единой математики, и вокруг него группируется вся современная школьная алгебра, начала анализа и в некоторой мере геометрия. Функция, являющаяся математической моделью многих реальных ситуаций, позволяет описывать и изучать разнообразные зависимости между величинами, познавать окружающий мир.

Понятие функции в математике складывалось поэтапно, возникая из самых разнообразных задач практики. Исходным пунктом здесь было понятие переменной величины. Содержание понятия функции развивалось, обогащалось в процессе эволюции математики, существовало множество споров относительно вновь вводимых определений. И сейчас невозможно сказать, что математика нашла окончательное, последнее определение этого понятия.

Общее понятие функции, которое используется в школе, несмотря на разность формулировок, остается абстрактным и трудным для понимания. Успешно овладеть им учащиеся смогут только с опорой на интуитивное, чувственное восприятие. Такую работу в своё время проводил Р.А. Майер (учитель одной из школ г. Енисейска, впоследствии декан физико-математического факультета Красноярского пединститута, ныне – университета), опираясь на личный опыт учащихся, их живой интерес к явлениям природы, склонность к наблюдениям. Понятие функции «выкристаллизовывалось» в их сознании главным образом в результате изучения конкретных процессов и явлений. Чтобы обеспечить такого рода наглядность, учитель сталкивался с большими техническими трудностями и тратил много времени при подготовке к уроку. Современному учителю неоценимую помощь на этом пути могут оказать компьютерные технологии, которые прочно вошли в нашу жизнь и в процесс обучения. Наиболее ярким представителем компьютерной математики является компьютерная среда GeoGebra. С помощью неё можно создавать яркую динамическую интерактивную среду, позволяющую не только развивать интеллектуальные и творческие способности учащихся, но и лучше «чувствовать» и понимать математику. Применение GeoGebra позволяет развивать умение самостоятельно приобретать новые знания, работать с различными источниками информации, повышает индивидуализацию обучения; обеспечивает гибкость и дифференцированность обучения.

Диссертационная работа посвящена исследованию проблемы использования анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra при изучении функций в 7-9 классах общеобразовательной школы.

Основная цель работы: разработать методическую систему изучения функций в 7-9 классах на основе использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra.

Объект исследования: процесс обучения функций в 7-9 классах.

Предмет исследования: методическая система использования анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra при изучении функций в 7-9 классах.

Гипотеза исследования: если в процессе обучения функциям использовать анимационные возможности компьютерной системы GeoGebra, то это будет способствовать повышению уровня усвоения материала и познавательного интереса.

Задачи исследования:

1. Описать роль информационных технологий в образовании на основе компьютерной среды GeoGebra.
2. Обобщить и систематизировать имеющийся опыт изучения функциональной зависимости в школьном курсе математике.
3. Разработать методические рекомендации по изучению линейной и квадратичной функций на основе использования анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra.
4. Разработать структуру и содержание учебного модуля «Построение графиков функций» на основе использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra.

Для решения поставленных задач применялись следующие методы исследования: теоретический анализ психолого-педагогической и методической литературы; сравнение и выбор; прогнозирование; наблюдение.

Научная новизна исследования заключается в разработке методической системы использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra при изучении функций.

Теоретическая значимость исследования заключается в описании дидактических условий использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra в обучении функциональной зависимости.

Практическая значимость исследования заключается в разработке методической системы обучения различным аспектам функциональной зависимости с использованием анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra и создании соответствующего дидактического материала.

Апробация и внедрение результатов. Материалы исследования были представлены: II Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» (Красноярск, 16-17 ноября 2013г.) на V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» (Красноярск, 16-17 ноября 2016г.)

- Е.Е. Деттерер, Использование анимации в среде GeoGebra при изучении функций в школьной математике / Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы II Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск, 16-17 ноября 2013г. / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол.; КГПУ им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2013.
- Е.Е. Деттерер, Изучение линейной функции с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra / Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск, 16-17 ноября 2016г. / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол.; КГПУ им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2016.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка и приложений.

Во введении обоснована актуальность данного исследования, сформулированы его цель, объект, предмет, гипотеза и задачи; раскрыта практическая значимость, охарактеризованы методы исследования.

В первой главе на основе проведенного анализа педагогической и методической литературы описана роль информационных технологий в обучении и проведен анализ опыта изучения функциональной зависимости с опорой на чувственное восприятия математических понятий и утверждений.

Во второй главе представлены методические рекомендации по использованию компьютерной среды GeoGebra при изучении линейной и квадратичной функций с опорой на чувственное восприятие. Представлены структура и содержание учебного модуля «Построение графиков функций» в школьной математике с использованием GeoGebra .

В заключении сформулированы основные результаты и выводы работы.

В приложениях представлены: примеры задач, приводящих к понятию функции, и их анимационные модели, анимационный дидактический материал, созданный в среде GeoGebra, для изучения линейной и квадратичной функций.

1.1 Роль информационных технологий в образовании на примере среды GeoGebra

В настоящее время значительно увеличилась роль информационных технологий в жизни людей, что способствует формированию информационного общества. Одним из основных и социально значимых направлений процесса информатизации современного общества является информатизация образования, под которой понимается процесс подготовки граждан к жизни в условиях современного информационного мирового сообщества и повышения качества образовательной и профессиональной подготовки специалистов на основе широкого использования компьютерной техники и информационных технологий. [2].

Так, Филатов О.К. [46] понимает информатизацию образования как:

1) комплекс мероприятий, связанных с насыщением образовательной системы информационными средствами, информационными технологиями и информационной продукцией;

2) методологию и стратегию совершенствования отбора содержания, методов и организационных форм обучения, ориентированных на развитие личности обучаемых, их интеллектуального потенциала, эффективную подготовку их к жизни и профессиональной деятельности в «информационном обществе».

Применительно к учебному процессу и к научным исследованиям основополагающее значение имеют новые информационные технологии. В отличие от традиционных образовательных технологий информационная технология имеет предметом и результатом труда информацию, а одним из орудий труда – компьютер. В системе образования отводится важная роль процессу создания и использования информационных технологий. Это вызвано тем, что специфика системы образования состоит в том, что она является, с одной стороны, потребителем, а с другой – активным производителем информационных технологий. Внедрение компьютеров и других средств информатизации в сферу образования оказало существенное влияние на изменение традиционных технологий обучения.

Информационные технологии присутствуют в любом виде деятельности. Появление компьютерных технологий дало возможность создать качественно новую образовательную среду как основу для развития и модернизации системы образования. Компьютерные технологии имеют ключевое значение на всех ступенях образовательной системы. На каждом этапе познавательной деятельности, научных исследований и во всех отраслях знаний компьютерные технологии выполняют функции, как инструментов, так и объектов познания.

Согласно ФГОС среднего (полного) общего образования необходимость овладения информационными технологиями в процессе изучения предметной области «Математика и информатика» определены следующими требованиями к предметным результатам освоения базового курса математики: использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств; владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач; сформированность представлений о компьютерно-математических моделях и необходимости анализа соответствия модели и моделируемого объекта [45].

Таким образом, информатизация образования, внедрение в учебный процесс новых информационных технологий относится к приоритетным направлениям государственной политики в области образования.

Согласно исследованиям, применение информационных технологий в обучении математике обеспечивает возможность наглядного представления графических данных; быстроту и точность вычислений; разнообразие способов предъявления учебной информации; возможность конструирования анимационных компьютерных моделей математических объектов и проведения, на их основе, компьютерных экспериментов и исследований;

расширение комплекса учебных задач; повышение информационной культуры и активизацию учебно-познавательной деятельности обучающихся. [9]

С использованием информационных технологий в преподавание математики вносится анимация. Многие понятия и теоремы становятся для учащихся «видимыми» и «осязаемыми». Попутно ученик учится использованию компьютерных технологий не только в обучении, но и при решении исследовательских задач.

Решение математической задачи в динамической математике проходит в три этапа:

1) Геометрическое моделирование условия задачи на экране компьютера.

2) Решение задачи на экране с использованием возможности анимации.

3) Построение математической модели решения, увиденного на экране. (Ларин)

Одной из эффективных и простых в использовании компьютерной системы, которая позволяет реализовать указанные этапы является динамическая среда GeoGebra.

GeoGebra – это свободная образовательная математическая программа, соединяющая в себе геометрию, алгебру и математические исчисления. Она разработана для изучения и преподавания математики в школах Маркусом Гогенвартером (Markus Hohenwarter) и международным сообществом программистов.

Программа имеет простой интерфейс, что способствует её быстрому освоению. Он напоминает классную доску, на которой можно рисовать графики, создавать геометрические фигуры и т.п. При этом в окне программы будет наглядно отображены производимые изменения: если изменить уравнение, изменится график, масштаб или ее положение в пространстве, уравнение, написанное рядом с графиком, автоматически будет скорректировано, согласно новым значениям.

Программа написана на языке Java, приложение поддерживает работу в различных операционных системах: Windows, Mac OS X, Linux, Android. Она переведена на 39 языков, в том числе на русский.

Преимущество программы GeoGebra по сравнению с похожими приложениями состоит в том, что она предлагает множественное представление объектов, связанных между собой динамически. Идея состоит в том, чтобы связать геометрические, алгебраические и числовые представления интерактивным образом. Это может быть сделано с помощью точек, векторов, линий и конических сечений, а также математических функций. Причём, если некоторую точку с помощью компьютерной мышки переместить в другое положение, то все зависимые элементы чертежа изменят своё положение так, что сохранится последовательность построения чертежа.

К еще одному аргументу в пользу GeoGebra можно отнести её простую интеграцию с офисными приложениями – все чертежи легко могут через буфер обмена быть перенесены для дальнейшего использования как в текстовые редакторы, поддерживающие работу с изображениями, так и в графические редакторы.

У GeoGebra богатые возможности работы с функциями: построение графиков разными способами, вычисление корней, экстремумов, интегралов, организация анимации и т.д.. Их использование позволяет не только увидеть на экране непрерывное вычерчивание графика функции, но и смоделировать само движение, определяемое данной функцией.

Методическое назначение программы GeoGebra многогранно и состоит в следующем.

- Обучающие функции: при сообщении знания, при формировании умения, навыков учебной и практической деятельности;

- Тренажеры, предназначенные для отработки разного рода умений и навыков, повторения или закрепления пройденного материала;
- Демонстрационные возможности: визуализация изучаемых объектов, явлений и процессов с целью их исследования и изучения;
- Моделирующие: позволяют моделировать объекты, явления или процессы с целью их изучения и исследования.

Таким образом, основная образовательная ценность использования компьютерной среды GeoGebra на уроках математики в том, что с помощью неё можно создавать более яркую динамическую интерактивную среду, позволяющую не только развивать интеллектуальные и творческие способности учащихся, но и лучше «чувствовать» и понимать математику. Применение GeoGebra позволяет развивать умение самостоятельно приобретать новые знания, работать с различными источниками информации, повышает индивидуализацию обучения; обеспечивает гибкость и дифференцированность обучения.

1.2 Функциональная содержательно-методическая линия

Функциональная линия в обучении математике является структурирующей и пронизывает все годы обучения. Она имеет общекультурное, мировоззренческое значение. В ней ярко воплощены изменчивость и динамичность реального мира, причинно-следственные связи и обусловленность реальных объектов и явлений, диалектические черты современного математического мышления. Существенное влияние на содержание и методику обучения функции в школе оказали идеи педагогов-математиков Ф. Клейна, А. Я. Хинчина, А. Н. Колмогорова, А. И. Маркушевича, А. Г. Мордковича и других.

Функция – математическая модель многих реальных ситуаций, позволяющая описывать и изучать разнообразные зависимости между величинами, познавать окружающий мир. Поэтому так важно знакомить учащихся с функциональным материалом, который позволяет осуществлять как внутрипредметные, так и межпредметные связи и показывать на практике, что многие понятия и законы носят функциональную основу, тем самым реализовывать прикладную направленность школьной математики.

Понятие функции прошло долгий путь развития и имеет свою историю. Хотя идея функциональной зависимости величин относится к глубокой древности, потребность в общем понятии функции возникла лишь в XVII в. в связи с возникновением идеи переменных, с которой в математику вошло движение, изменение, процессы, наблюдаемые во времени. Первоначальная трактовка была либо геометрической, либо механической: зависимость ординаты точек совершенно произвольных кривых – функций от абсцисс, путь и скорость – функции от времени (П. Ферма, Р. Декарт, И. Ньютон, Г. Лейбниц). В этот период Г. Лейбниц ввел термины: «функция» (1673), «переменная», «константа» (1698). Термин «функция» в переводе с латинского означает «свершение», «выполнение». Постепенно трактовка функции стала освобождаться от первоначальных представлений и доминировать стала аналитическая – отождествляющая функцию с формулой, задающей ее (И. Бернулли, Л. Эйлер). И. Бернулли в 1718 г. дал впервые явное определение функции, Л. Эйлер в 1734 г. ввел обозначение $y = f(x)$. Примерно в середине XIX в. понятие функции освободилось от единовластия формулы, и в новом определении делается акцент на идею соответствия (Н. И. Лобачевский, Л. Дирихле), которое называют классическим, близким к современным. После создания общей теории множеств идея соответствия была дополнена идеей множества, позволившей рассматривать функцию не только для числовых множеств, но и на объектах произвольной природы. В конце XIX в. сформировалось понятие отображения, развивающее понятие функции. В XX в. в связи с потребностями физики возникли «обобщенные функции», сильно отличающиеся по внешнему виду от исходных представлений о функции. На примере развития понятия функции возможно познакомить учащихся с проявлением важных философских категорий – причины и следствия.

С понятием функции связана определенная система общефункциональных понятий (числовая функция, области определения и значений, способы задания, график, возрастание и убывание, четность и нечетность, нули (корни) функции, знакопостоянство, монотонность, экстремумы, периодичность, обратная и сложная функции, непрерывность или разрывность, приращение аргумента и функции, дифференцируемость, интегрируемость и др.). Многие из перечисленных понятий именуются и свойством функции, и названием отдельного вида функций. Например, свойство периодичности одной из тригонометрических функций указывает одновременно на принадлежность ее к виду периодических функций, выделяемых данным свойством.

В методике обучения математике известны два основных подхода в трактовке понятия функции: традиционное (генетическое) и теоретико-множественное (логическое), отражающие отдельные исторические этапы его развития и отличающиеся выбором определяющего (родового) понятия и соответствующей терминологии.

Традиционная трактовка понятия функции основана на разработке и методическом освоении основных черт, вошедших в понятие функции до середины XIX в. Наиболее существенными понятиями, которые при этой трактовке входят в систему функциональных представлений, служат переменная величина, функциональная зависимость переменных величин, формула (выражающая одну переменную через некоторую комбинацию других переменных), декартова система координат на плоскости.

При реализации традиционного подхода подчеркивается «динамический» характер понятия функциональной зависимости, легко выявляется модельный аспект понятия функции относительно изучения явлений природы. Такая трактовка естественно увязывается с остальным содержанием курса алгебры и начал математического анализа, поскольку большинство функций, используемых в нем, выражаются аналитически или таблично.

Переменная при таком подходе всегда неявно (или даже явно) предполагается пробегающей (непрерывный) ряд числовых значений. Поэтому в значительной степени понятие связывается только с числовыми функциями одного числового аргумента, определенными на числовых промежутках. В обучении приходится, используя и развивая функциональные представления, постоянно выходить за пределы этого первоначального описания.

Теоретико-множественная трактовка понятия функции исходит из положения о том, что строить обучение функциональным представлениям следует на основе методического анализа понятия функции в рамках понятия алгебраической системы. Функция при таком подходе выступает в виде отношения специального вида между двумя множествами, удовлетворяющего условию функциональности. Начальным этапом изучения понятия функции становится вывод его из понятия отношения. [32]

Реализация этого подхода вызывает необходимость иллюстрировать понятие функции при помощи разнообразных средств; язык школьной математики при этом обогащается. Помимо формул и таблиц, здесь находят свое место задание функции стрелками, перечислением пар, использование не только числового, но и геометрического материала; геометрическое преобразование при таком подходе оказывается возможным рассматривать как функцию.

В современном направлении существует еще один подход, согласно которому дается определение не самого понятия функции, а лишь функциональной ситуации. Для такого определения характерна фраза «…то говорят, что на множестве задана функция... ».

А. Н. Колмогоров в свое время рекомендовал отнести понятие функции к неопределяемым понятиям [1]. М. И. Башмаков считает, что «в определенном смысле понятие функции является одним из основных, близких к неопределяемым исходным понятиям» [3]. А. Г. Мордкович отказывается «от формального определения функции при первом его появлении» и ограничивается «пояснительным описанием функциональной ситуации» [34].

Все вышеизложенное подтверждает мысль о том, что вопрос об оптимальном для средней школы определении функции по-прежнему остается актуальным. О сложности проблемы говорит уже то обстоятельство, что во всех действующих школьных учебниках алгебры даются различные по формулировке определения функции, отражающие один из подходов и методические соображения авторов. Определения функции, или функциональной ситуации, в старшей школе также разнятся.

В двух учебниках алгебры [5, 34] учащимся явно сообщается, что определение функции в математике может быть дано не единственным способом и приводятся различные трактовки понятия.

Несмотря на различные формулировки определений функции в них можно выделить общие моменты:

1) под термином «функция» по умолчанию подразумеваются числовые функции (они и являются объектом изучения в школе);

2) термин «переменная» используется для общего обозначения различных меняющихся величин;

3) подчеркивается одновременное наличие двух неравноправных переменных (x и y);

4) четко выделен основной характерный признак функции – однозначность (в школе изучаются лишь однозначные функции);

5) речь не идет о каком-либо определенном способе задания функции (это отдельный вопрос для изучения).

Отметим, что принятые сейчас определения в основной школе являются осовремененным вариантом классического направления. Они педагогически целесообразны для первичного знакомства с функциями: ближе к привычным представлениям учащихся с учетом имеющейся пропедевтики сразу же дают мощный инструмент для описания и изучения меняющихся процессов, как это и было в истории науки. Отказ от чисто теоретико-множественного определения функции (более формального) через понятие соответствия (отношения, отображения), которое использовалось в учебниках алгебры в 70-е гг. прошлого века, считается не оправданным в виду ряда его психолого-педагогических недостатков [6]. Однако, при повторном изучении понятия функции в старшей школе (особенно в профильных классах), когда учащиеся уже владеют понятием на содержательном уровне и когда их общее логическое развитие стало значительно выше, желательно ознакомить и с современным определением, которое является более общим, допускающим рассмотрение множеств, элементами которых являются объекты произвольной природы. Это позволит расширить круг функций, распространить определение на геометрический материал, с единых позиций подойти к трактовке числовых функций и геометрических преобразований. Тем самым полнее раскрыть преемственность в изучении математики в школе и ВУЗе.

Важное место в функциональной линии уделяется глубокому изучению класса функций, получивших название элементарных (что не означает простых), которые имеют широкую область применения. К элементарным функциям относят многочлены, рациональные и иррациональные функции, показательную, логарифмическую, тригонометрические и обратно тригонометрические функции. Этот набор функций тесно связан с основными арифметическими операциями (сложение, вычитание, умножение, деление), алгебраическими операциями (возведение в целую степень, извлечение корня) и трансцендентными операциями (возведение в иррациональную степень, логарифмирование, тригонометрическими, модуль), понятием непрерывности и геометрическими преобразованиями, что позволяет устанавливать связи функциональной линии с другими содержательно-методическими линиями.

Успешному изучению функционального материала способствует соответствующая пропедевтика, которая начинает осуществляться в начальной школе и в 5 – 6-х классах. Изучение математики в этих классах должно обеспечивать количественное накопление фактов и специфических способов деятельности, на базе которых возможен качественный скачок в изучении понятия функции и конкретных ее видов.

Систематическое изучение функций, их свойств и графиков, приложений начинается в курсе алгебры 7 – 9-х классов, а затем получает продолжение в курсе алгебры и начал анализа 10 – 11-х классов, причем в основном изучаются числовые функции, т. е. такие, которые заданы на числовом множестве и принимают значения также из числового множества. Числовые функции – и объект изучения, и та непосредственная среда, в которой строятся все основные понятия «математического анализа». В школе ограничиваются изучением начал анализа, в основном как аппарата для исследования элементарных функций и применения основ дифференциального и интегрального исчислений в смежных предметах. Учащиеся знакомятся с анализом поведения функции в области определения (глобальный подход) и в окрестности конкретной точки (локальный подход). Современное содержание функционального материала позволяет учащимся ознакомиться с исследованием функций как средствами алгебры (элементарные средства), так и средствами математического анализа (с помощью понятия производной); убедиться в преимуществах последнего, позволяющего изучать широкий класс функций и упрощать процесс получения результата.

Понятие функции – центральное в функционально-графической линии. Существуют различные мнения по поводу места введения формулировки определения в структуре курса алгебры. Одни считают, что логичнее определение дать сразу же при первом появлении понятия, т. к. трудно сформулировать ясное представление о понятии функции без четкой формулировки, выделяющей существенные признаки. Другие предлагают ввести формальное определение только тогда, когда учащиеся приобретут достаточный опыт работы с конкретными функциями, а поначалу ограничиться описанием, не требующим заучивания. Но все убеждены в том, что определить функцию или функциональную ситуацию нужно в основной школе. Однако формулировки определений различаются. Считается, что родовое понятие и соответствующая терминология, используемая в определении функции, должны быть понятны ученикам и не требовали предварительных громоздких рассмотрений на данном этапе изучения. Смысл определяющих (опорных) понятий и терминов раскрывается с помощью конкретных примеров, без формальных определений с опорой на прежний опыт, полученный на пропедевтическом этапе, тем самым реализуется индуктивный метод обучения, что соответствует возрастным особенностям учащихся.

Остановимся на методике введения общего понятия функции по учебнику алгебры 7-го класса Ю. Н. Макарычева и др. [28] в котором функция трактуется как особого рода зависимость одной переменной от другой. Под термином «зависимость» понимается связь между переменными. Такая точка зрения имеет богатые исторические корни, тесно связана с приложениями и позволяет полнее использовать язык графиков. Кроме того у учащихся уже имеется достаточный опыт в использовании понятия зависимости между величинами. Поэтому здесь также целесообразно избирать индуктивный метод с эвристической беседой при введении понятия функции, рассмотрев и проанализировав три-четыре ранее встречающиеся зависимости между переменными, заданные формулой, графиком и таблицей, которые позволили бы раскрыть содержание терминов: «независимая переменная», «зависимая переменная». В учебнике предлагаются четыре задачи на движение, о площади квадрата, стоимости проезда, графике температуры, в которых величины выступают как переменные. При этом подчеркнуть, что каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной. Сообщить, что такая зависимость одной переменной от другой называется функциональной, или функцией. После такой подготовительной работы можно вводить определение, а затем термины «аргумент», «область определения функции», «значения аргумента и функции». Важно обратить внимание на то, что термин «функция» в учебнике употребляется в двух смыслах: как особого рода зависимость между двумя переменными, так и сама зависимая переменная. Для учащихся должны быть привычными обороты речи типа «площадь квадрата является функцией длины его стороны», «зависимость площади квадрата от длины его стороны является функциональной» и т. п. Особо следует обратить внимание на то, что в формулировке определения слово «соответствует» не говорит о виде выражения функциональной зависимости (функции), поэтому необходимо дать учащимся представление о различных способах задания функции, которые уже были обозначены (но не названы) во вводных задачах – формулой, таблицей, графиком. Затем формулируется определение графика функции как множества всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции. Учащиеся учатся при любом способе задания находить значение функции по значению аргумента и решать обратную задачу, осуществлять переход от одного способа задания функции к другому (если это возможно).

На этом этапе изучения общих понятий функции и графика функции не вводится соответствующая символика. Она вводится во второй главе учебника 9-го класса, когда учащиеся уже ознакомились с простейшими функциями. Используются стандартные обозначения для переменных: x и y (они же обозначают координатные оси); запись y = f(x) означает некоторую функцию; символ f(x) – выражение с переменной или значение функции, соответствующее значению аргумента, равному x; буква f (первая буква латинского слова functio) характеризует правило вычисления f(x) по x.

Аналогичный подход раннего введения понятия функции принят и в учебнике алгебры 7-го класса Ш. А. Алимова и др. [28] как одной из пары переменных (y есть функция x – y(x)).

В других учебниках федерального списка формально-логическое определение функции дается позднее (8-й или 9-й класс). К этому времени учащиеся уже знакомы со множеством действительных чисел и поэтому можно без опасений говорить об области определения функции и графики строить в виде непрерывной линии. Кроме того учащиеся располагают таким алгебраическим материалом, который позволяет повысить уровень строгости в обосновании свойств функций, а именно тождественными преобразованиями выражений, уравнениями и неравенствами. При таком подходе общее понятие функции и ее графика возникает как обобщение накопившегося опыта в работе с различными видами функциональных зависимостей и их графиков, некоторыми свойствами функций. А. Г. Мордкович в учебнике алгебры 9-го класса [34] подводит учащихся к появлению у них потребности в формальном определении функции, графика и свойств функции, обращаясь к истории развития математики. В определениях А. Г. Мордковича; С. [34]; Г. В. Дорофеева [5] и др. подчеркивается, что функция рассматривается на некотором числовом множестве, которое объявляется областью определения функции. А. Г. Мордкович в отличие от других авторов переменную y не называет функцией; из его определения следует, что функция обозначается $y = f(x)$, где $x \in X$ (X – область определения), акцент сделан на заданную, а не на естественную область определения функции (область допустимых значений выражения $f(x)$). В учебниках А. Г. Мордковича [34] и М. И. Башмакова [3] ставится вопрос о том, что нужно указать при задании функции. Учащиеся должны осознавать, что ответ заложен быть в самом определении, а именно, область определения и правило (закон) соответствия. Подчеркнуть, что функция не зависит от выбора обозначений для аргумента и способа описания правила для вычисления ее значений; функции, имеющие одинаковое правило, но различные области определения, считаются разными.

В учебнике А. Г. Мордковича говорится, что в математике имеется достаточно много способов задания функции. Кроме наиболее популярных (аналитический, графический, табличный) он знакомит учащихся со словесным (описательным) способом задания функции, когда правило соответствия описывается словами родного языка. М. И. Башмаков вводит понятие уравнения функциональной зависимости между переменными (неявное задание функции); например, соотношение между переменными x и y в виде уравнения $3x – 5y = 7$ является неявным заданием функции, т. к. оно не разрешено относительно y.

Общее понятие функции довольно сложное, поэтому успешно овладеть им учащиеся смогут только в результате длительного накопления конкретных представлений и фактов в курсе алгебры основной, а затем и старшей школы. Необходимое условие сознательного усвоения понятия функции учащимися – приведение собственных примеров зависимостей, являющихся и не являющихся функциями, использование примеров функциональной зависимости из других предметных областей и жизни. Использование таких задач не только приводит к понятию функции, но и позволяет «оживлять» школьный учебник. (**Приложение)** Неоценимую помощь на этом пути могут оказать компьютерные технологии и, в частности компьютерная среда GeoGebra. Её использование позволяет не только увидеть на экране непрерывное вычерчивание графика функции, но и смоделировать само движение, определяемое данной функцией, а также табличное изменение y в зависимости от x.

1.3. Обучение понятию функциональной зависимости в школьной математике с опорой на чувственное восприятие математических понятий и утверждений.

Одним из истоков наших исследований является книга замечательного преподавателя КГПУ им. В.П. Астафьева, в прошлом декана математического факультета, Роберта Адольфовича Майера «Из опыта изучения свойств функций в восьмилетней школе». [27] Во время создания книги автор работал в Енисейском педагогическом институте и экспериментальной базой его исследований являлись школы г. Енисейска Красноярского края. Книга является историческим свидетельством выстраивания стержневой линии функциональной зависимости в школьной математике на основе чувственного, интуитивного восприятия математических понятий и утверждений. Автор предстает как выдающийся представитель высокого ИСКУССТВА преподавания математики.

Особое внимание Р.А. Майер уделяет функциональной пропедевтики, которая сводится в основном к построению и «чтению» графиков конкретных физических зависимостей. При этом значительная часть таких графиков строилась учащимися на экспериментальной основе, что вызывало у них неизменный интерес и способствовало активному усвоению материала.

В качестве примера рассмотрим его описание организации работы по построению температурных графиков. Ознакомление с ними автор предлагает начинать с построения кривой нагревания по экспериментально полученным данным. Для этого в класс приносили укрепленный на штативе тонкостенный стеклянный сосуд со 100г. воды, лабораторный термометр со шкалой от 0 до 100°С, спиртовку и секундомер. Термометр укрепляли на штативе с таким расчетом, чтобы он не касался дна сосуда. Объяснив содержание и технику эксперимента, задавали учащимся несколько вопросов с целью заинтересовать их результатами опыта:

1. Через сколько минут закипит вода в сосуде?

2. На сколько градусов за каждую минуту будет повышаться температура воды в сосуде?

3. На одинаковое ли число градусов будет повышаться температура воды в первые и последние минуты опыта?

Затем к доске вызывали трех учащихся. Один из них пользуясь секундомером, отсчитывал время (минуты), второй следил за показаниями термометра и через каждую минуту объявлял очередную температуру. Третий заносил эти данные в заранее начерченную на доске таблицу. Остальные учащиеся зарисовывали установку и записывали данные изменений:

Время в минутах	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Температура в градусах	18	33	47	60	72	83	91	97	100

Ознакомившись с таблицей, учащиеся отвечали на поставленные в начале опыта вопросы. Затем с помощью учителя выясняли, что если измерение температуры проводить непрерывно, то концы вертикальных отрезков, построенных по результатам таблицы, образуют некоторую линию, характеризующую изменение температуры. Проведя через концы построенных вертикальных отрезков плавную дугу, назвали её графиком температуры или кривой нагревания. Узнавали назначение термографа.

Определили физический смысл непрерывности и плавности построения графиков, а также причины его отклонения от прямой линии.

На том же уроке, пользуясь построенным графиком, находили температуру воды для некоторых промежуточных значений времени, а также моменты времени, в которые вода принимала заданную температуру.

Чтобы избежать дальнейших трудностей при графическом изображении времени, учащимся предлагались следующие задания:

1. Покажите отрезок горизонтальной оси, изображающий шесть минут.

2. Покажите отрезок, изображающий шестую минуту.

3. Определите, на сколько градусов возросла температура за четыре первые минуты, за одну четвертую минуту?

Следует отметить, что подобные задания теперь ждут школьников на ОГЭ в 9 классе в разделе «Реальная математика».

Подобные эксперименты Р.А. Майер подробно описал в своих работах, он предлагает проводить их каждую четверть и дополнять простыми ежедневными заданиями по «чтению» графиков.

Уникальность такой работы и её ценность в том, что основываясь на личном опыте учащихся, их живом интересе к явлениям природы, склонность к наблюдениям, понятие функции «выкристаллизовывалось» в их сознание главным образом в результате изучения конкретных процессов и явлений.

Прежде, чем перейти к определению понятия функции, учащихся знакомят с прикладными, жизненными задачами. Отвечая на вопросы учителя, ученики приходят к понятию постоянной и переменной величины, допустимым значениям.

Переходя к определению понятия функции, указывается, что для науки и её практических приложений представляет интерес не столько факт существования переменных величин, сколько те зависимости, которые имеются между различными переменными величинами, участвующими в данном явлении. Это объясняется тем, что знание таких зависимостей дает возможность ответить на вопрос, как влияет изменение одной величины на поведение других величин. Последнее в свою очередь помогает людям предвидеть ход событий, а в некоторых случаях и управлять ими, помогает использовать естественно протекающие процессы в своих интересах. Далее автор приводит конкретные примеры зависимостей, которые широко используются в технике и производстве, подчеркивая тем самым связь математики с жизнью.

Кроме того, автор ведет разговор о том, что в некоторых случаях зависимость может быть охарактеризована не только с качественной, но и с количественной стороны. Зная числовое значение одной из зависимых величин, мы можем найти, «предсказать» числовое значение другой. Что свидетельствует о более глубоком изучении процессов и вооружает человека большими возможностями.

Затем вводится понятие функциональной зависимости, функции, независимой переменой, области определения.

На втором уроке происходит знакомство с различными способами задания функции, весь материал снабжен примерами и пояснениями практического и теоретического характера.

Далее изучаются основные свойства функций и их исследование, линейная и квадратичные функции. Их изучение также строится на практической направленности. Линейная функция, например, вводится как функция, описывающая равномерные процессы. При её изучении автор не ограничивался рассмотрением фактов геометрического характера (прямолинейность графика, его положение относительно осей координат). Значительное число заданий посвящено применению линейных функций к решению практических вопросов. Квадратичная функция вводится как функция, описывающая равноускоренные (равнозамедленные процессы). При её изучении рассматриваются вопросы, связанные с составлением квадратичной формулы по данной числовой таблице.

Предложенная автором система задач с привлечением экспериментов и лабораторных работ, по нашему мнению, пропагандирует опору на чувственное восприятие математических понятий и утверждений, что обеспечивает неформальное усвоение функциональных понятий, раскрывает коренную связь понятия функции с естественными науками и практической деятельностью людей. Опору на интуитивное восприятие математических понятий и математических доказательств мы не только поддерживаем, но и утверждаем в современном школьном обучении математике.

Кроме того, книга показывает, с какими техническими трудностями встречался школьный учитель на этом пути, например, при моделировании графиков функций (модели выпиливались из фанеры). Во второй главе мы покажем, как легко, просто и быстро современный учитель может преодолеть эти трудности, используя анимационные возможности компьютерных сред.

Выводы по Главе I.

Понятие функции является одним из основных, фундаментальных понятий математической науки, непосредственно связанной с реальной действительностью. Изучение функции начинается в 7-м классе и охватывает все годы обучения. При этом авторы школьных учебников не пришли к единому мнению относительно определения и структуры изучения функций. Общее понятие функции, которое используется в школе, абстрактным и трудным для понимания. Чтобы решить эту проблему Р.А. Майер разработал систему уроков, направленных на интуитивное восприятие функционального материала. Современные информационные технологии позволяют учителю «оживить» школьную математику, смоделировать движение – источник функциональной зависимости. На наш взгляд, компьютерная среда GeoGebra наилучшим образом выполнит представленные задачи.

Глава 2. Основы методической системы изучения функций с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra.

Прежде, чем приступить к построению методической системы использования анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra мы проанализировали понятие «методическая система». Понятие «методическая система» рассматривалось многими исследователями, которые предлагали свое видение этой категории педагогической науки. Так, например, С. В. Казакова подчеркивает, что данное понятие трактуется в науке по-разному: как концепция (М. В. Рыжаков), образовательная модель взаимосвязанных компонентов (В. М. Жучков), совокупность взаимосвязанных компонентов (С. И. Архангельский, Н. В. Кузьмина, А. М. Пышкало), сложное динамическое образование (Г. Г. Хамов), система обучения какому-либо предмету (Н. Н. Лобанова)

В своей работе мы будем использовать формулировку А.М. Пышкало, как наиболее соответствующее вызовам времени, на наш взгляд. Согласно нему, под методической системой понимают структуру, компонентами которой являются цели обучения, содержание обучения, методы обучения, формы и средства обучения. Все составляющие методической системы обучения выступают в столь тесной взаимосвязи, что всякое изменение одного из них влечет за собой изменение других составляющих и всей системы в целом

2.1 Методика изучения линейной функции с использованием компьютерной анимации.

После того как учащиеся получили общее представление о числовых функциях, они переходят к изучению конкретных функций [28]. В качестве первой из них рассматривается линейная функция как самая простая математическая модель описания реальных процессов. Учащиеся впервые приступают к изучению графика определенного вида функций, поэтому необходимо показать им важность изучаемого материала с использованием практических примеров линейных зависимостей величин, известных им из математики, других смежных предметов и практической жизни.

В современных учебниках алгебры имеются разночтения во времени начала изучения линейной функции – 7-й или 8-й класс, [28, 34] последовательности изучения ее с частным случаем – прямой пропорциональностью (дедуктивный или индуктивный подход), в сообщении большего или меньшего числа свойств при первоначальном ознакомлении (компактное или распределенное по различным классам изучение свойств), во взаимосвязи линейного уравнения с двумя переменными и линейной функции, их графиков.

В большинстве школьных учебников алгебры изучение темы «Линейная функция» традиционно начинается с прямой пропорциональности и ее графика. С понятием прямой пропорциональной зависимости двух величин, числовые значения которых выражаются положительными числами, учащиеся уже знакомы. Им известно, что две величины называют прямо пропорциональными, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз. Они решали задачи на пропорциональные величины с помощью пропорции, учитывая, что отношения соответствующих значений этих величин равны. Поэтому зависимость называлась прямой пропорциональностью.

Изучение прямой пропорциональности целесообразно начать с рассмотрения нескольких подводящих задач, которые учащиеся уже неоднократно решали. Например, таких:

1. Мотоциклист двигался со скоростью 16 м/с в течение t секунд. Сколько метров (S) проехал он за это время?

2. Ученик купил n карандашей по 5 р. Сколько рублей (C) он заплатил за покупку?

3. Найти массу *m* (г) алюминиевого провода, объем которого V ($см^3$), если плотность алюминия равна 2,7 г/$см^3$.

Учащиеся легко решат предложенные задачи, запишут три формулы: S=16t (t>0), C=5n ($n \in N$), m=2,7V (V>0) и выяснят, что в каждом случае мы имеем дело с прямой пропорциональной зависимостью. Можно предложить ученикам самим привести подобные задачи, решение которых приводит к формулам, аналогичным рассмотренным.

В дополнение целесообразно привлечь анимационные рисунки, демонстрирующие эти зависимости. Так, например, (Рис. 1) при фиксированной цене товара, равной 5, при изменении количества будет изменяться стоимость. Это изменение можно увидеть на оси ОУ. Изменение количества товара приводит к изменению его стоимости. Тем самым мы построили виртуальный инструмент (прибор) для умножения действительных чисел в среде GeoGebra. Аналогичным образом можно организовать демонстрацию остальных примеров.

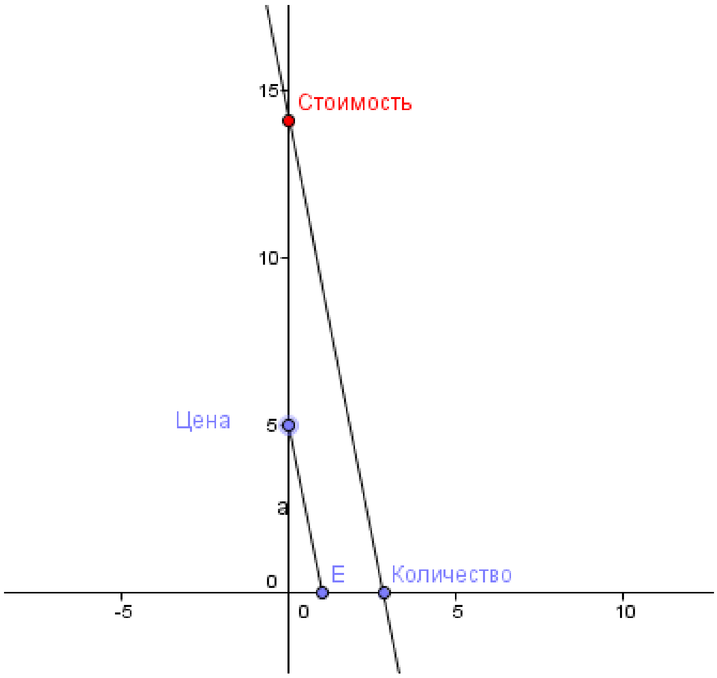


Рис.1

Далее внимание учащихся следует обратить на то, что формулы, выражающие совершенно различные явления, имеют одинаковую математическую структуру и в общем виде могут быть записаны одной формулой: $y=kx$, где $k \neq 0$, x и y – две переменные. Поэтому можно сказать, что такие явления описываются одной и той же функцией, которую можно назвать прямой пропорциональностью. После этого формулируется определение: прямой пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y=kx$, где x – независимая переменная, k – не равное нулю число. Обратить внимание учеников на условие, что $k \neq 0$, т. к. k – это коэффициент прямой пропорциональности. Проиллюстрировать сказанное можно при помощи анимационной модели, созданной в среде GeoGebra (Рис. 2).

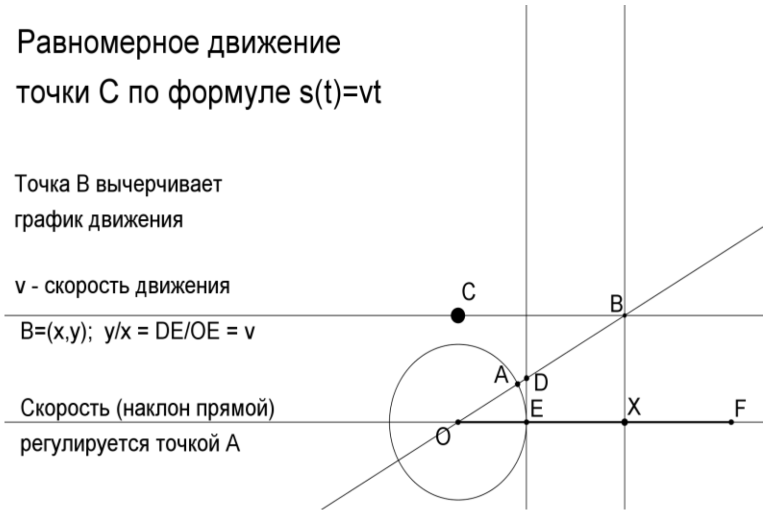


Рис. 2

Необходимо вспомнить известное свойство пропорциональных переменных x и y и записать его с помощью пропорций: $x_1/x_2 = y_1/y_2$ ($y_1/x_1 = y_2/x_2$), где x_1 и x_2 – значения аргумента, y_1 и y_2 – соответствующие им значения функции (исключаем значения, равные нулю). В такой формулировке коэффициент пропорциональности может быть и отрицательным. В определении фраза «можно задать» означает, что функцию можно задать и иначе. Такая фраза будет применяться в определениях и других видов функций. График (прямая *a* на рис.3), построенный при помощи ползунка и строки ввода, позволит увидеть как изменяется график функции в зависимости от изменения коэффициента *k*.

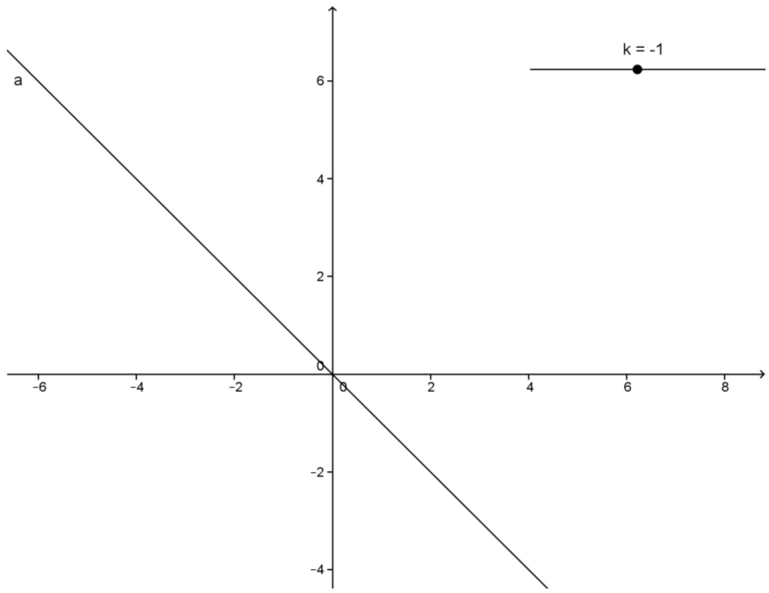


Рис.3

Для усвоения определения необходимо предлагать учащимся упражнения на распознавание прямой пропорциональности среди функций, заданных формулой (таблицей), нахождение коэффициента пропорциональности. При пропорциональности переменных выражение, стоящее в правой части формулы, имеет смысл при всех значениях x и каждому x соответствует единственное y, следовательно, формула задает функцию.

Теперь можно перейти к построению и изучению графика прямой пропорциональности. Учащимся предлагается построить несколько графиков функции (например, y = 2x, y = 0,5x, y = -2x) по нескольким точкам (например, шести-семи), зафиксированным в таблице значений. После нанесения точек на координатную плоскость учащиеся с помощью линейки (эмпирически) убеждаются, что все отмеченные точки лежат на прямой, которая проходит через начало координат. Проведя с помощью линейки прямую в каждом случае, ученики убеждаются, что она и является графиком заданной функции. Из курса геометрии учащиеся знают, что положение прямой определяется двумя точками, поэтому для построения графика достаточно вычислить координаты двух точек, одной из которых может быть начало координат. На первых порах в целях контроля за вычислениями и построением целесообразно находить координаты третьей точки. Целесообразно дублировать эти исследования на компьютерном экране, используя анимационные возможности среды GeoGebra.

Дальше можно перейти к исследованию расположения графика в координатной плоскости в зависимости от коэффициента. Предварительно предложить учащимся в качестве самостоятельной работы в среде GeoGebra построить графики конкретных функций при различных значениях $k>0$ и $k<0$, а затем ответить на вопрос: от чего зависит расположение графиков в каждом случае? Рассматривая графики, учащиеся наглядно установят роль коэффициента.

Итогом проделанной работы будет общий вывод, касающийся графика изучаемой функции:

1) графиком является прямая;

2) прямая проходит через начало координат;

3) прямая строится по двум точкам;

4) прямая располагается при $k>0$ в I и III координатных четвертях, а при $k<0$ – во II и IV;

5) прямая не совпадает с осями координат;

6) точка принадлежит прямой, если ее координаты – соответствующие друг другу значения аргумента и функции.

Заметим, что все теоретические положения сопровождаются конкретными примерами, контрпримерами и графическими иллюстрациями.

Следующий шаг – изучение очередной функции – линейной и ее графика. Название говорит о геометрической модели функции – прямой линии, служащей ее графиком. Знакомство с новой функцией происходит с опорой на знания о прямой пропорциональности и осуществляется по тому же плану. Вначале рассматриваются две-три сюжетные задачи в качестве мотивировки. Приведем возможные из них:

1. Автомобиль, находясь в 5 км от города, начал движение от него со скоростью 60 км/ч. На каком расстоянии (S) от города он будет через t ч?

2. На складе было 500 т угля. Ежедневно стали увозить по 30 т угля. Сколько угля будет на складе (m) через n дней? Решение задач приводит к двум формулам: $S= 60\ t + 5$, $m = 500- 30\ n$, которые не напоминают прямую пропорциональность, следовательно, имеем дело с новой функцией, которая задается общей формулой $y = kx + \mathrm{b}$ и называется линейной. Как видим, формула возникает в результате обобщения результатов реальных ситуаций. Дается соответствующее определение. Внимание учеников обращается на то, что в формулировке нет ограничений на числа k и b.

Определение геометрического смысла коэффициентов k и b при построении и исследовании графика линейной функции $y = kx + b$целесообразно организовать, используя динамическую среду GeoGebra. Ученикам предлагается сесть за компьютеры и заполнить исследовательскую карту, предложенную учителем. Предполагается работа в группах по 4 человека.

Задания исследовательской карты:

В среде GeoGebra построить график функции $y = kx + b$ и выяснить зависимость графика от выбора коэффициентов k и b (Рис.4).

Рис.4

Построение.

1. Кликните инструментом «Ползунок» на выбранную точку Полотна. В меню в качестве имени укажите *k*, не изменяя границы параметра. На выбранном месте появится изображение ползунка в виде отрезка с точкой. Аналогично постройте ползунок для параметра b.

2. В строку ввода запишите: $f(x) = k * x + b$. После ввода на Полотне появится график функции при установленных значениях параметров. Аналогично постройте график функции $y = kx$.

3. На построенном анимационном рисунке проведите эксперименты и заполните таблицу:

Значение параметра	*k*=-4	*k*=-0,5	*k*=0	*k*=0,3	*k*=2	*k*=	*k*=
Вид графика							
Поведение функции							
Значение параметра	*b*= -3	*b*= - 0,2	*b*=0	*b*=0,8	*b*= 4	*b*=	*b*=
Вид графика							
Поведение функции							

4. Сделайте выводы: Как изменяется график функции при изменении (на ползунке) коэффициента b? Коэффициента k? Как геометрически охарактеризовать эти коэффициенты?

В результате работы с исследовательской картой учащиеся замечают, что график либо «поднимается в горку» (функция возрастает) либо «спускается с горки» (функция убывает). Здесь же вводятся понятия убывания и возрастания функции. «Горка» тем круче, чем больше $|k|$. При $k=0$ функция принимает вид $y=b$ и не возрастает и не убывает, она постоянна.

Проще всего выяснить геометрический смысл коэффициента b. Видим, что прямая $y=kx+b$ проходит через точку $B=(0,b)$. Это означает, что координаты этой точки удовлетворяют уравнению $y=kx+b$. В самом деле, при $x=0$ получаем $y=b$. Характеризуя геометрически коэффициент b, можно сказать, что прямая $y=kx+b$ отсекает от оси ординат отрезок, равный $|b|$, считая от начала координат. Учащиеся должны сделать вывод о том, что коэффициент b отвечает за сдвиг графика функции $y=kx$ вдоль оси ординат: при $b>0$ сдвиг происходит вверх на b единиц, а при $b<0$ сдвиг происходит вниз на $|b|$ единиц.

Для выяснения геометрического смысла коэффициента k учащиеся еще не располагают достаточными знаниями: они еще не знают что такое тангенс произвольного угла. Вместе с тем, при $k>0$ это возможно. Видим, что прямые $y=kx+b$ и $y=kx$ параллельны и составляют равные углы наклона с положительным лучом оси абсцисс. Этот угол наклона обозначим через α. Для любого значения переменной $x=x_0>0$ и соответствующего значения переменной $y=y_0>0$ из равенства $y_0=kx_0$ получаем $k=\dfrac{y_0}{x_0}$. Геометрически x_0 и y_0 есть катеты прямоугольного треугольника с острым углом α и k есть отношение противолежащего катета к прилежащему. В этом и состоит геометрический смысл коэффициента $k>0$. Видим, что это отношение определяет угол наклона прямой к оси абсцисс, отсчитываемый от положительного луча против часовой стрелки. Поэтому k называют угловым коэффициентом.

Геометрический смысл углового коэффициента используют для характеризации наклона автомобильной дороги к горизонтали. Его называют уклоном дороги и измеряют в процентах. Если длина участка дороги по горизонтали равна x_0 метрам, а подъем на этом участке составляет y_0 метров, то уклон дороги составляет $k = \frac{y_0}{x_0}$ процентов. Таким образом, уклон в 1% есть отношение 1 м. к 100 м.

На автомобильной дороге можно встретить предупреждающий знак крутого подъема (спуска) в виде равностороннего треугольника с вершиной вверх, внутри которого изображена горка подъема (спуска) и над ней стоит 12%. Это означает, что на сто метров горизонтального участка, подъем (спуск) составляет 12 м. Сколько это составляет градусов? Уклон в 100% соответствует прямоугольному треугольнику с острым углом $\alpha = 45^{\circ}$. Отсюда 12% соответствуют $\frac{12}{100} \cdot 45 = 5.4$ градуса.

При строительстве скоростной трассы допустимый уклон не должен превышать 40%. На магистральных дорогах, где максимально разрешенная скорость 100 км/час, уклон не должен превышать 50%. Учащимся предлагается вычислить в градусах уклоны в 5%, 20%, 15%, 30%, 40%, 60% и смоделировать их на экране компьютера.

Таким образом, коэффициент k характеризует угол наклона α прямой к оси абсцисс. При $k > 0$ имеем $k = \frac{y_0}{x_0}$, то есть отношение катетов прямоугольного треугольника с острым углом α. Это отношение в математике называют тангенсом угла α и обозначают $tg\alpha$. Следовательно, геометрический смысл коэффициента k выражается равенством $k = tg\alpha$. Можно сообщить, что в десятом классе учащиеся познакомятся с общим определением $tg\alpha$ как отношения второй координаты произвольной точки прямой $y = kx$ к ее первой координате. Благодаря этому геометрический смысл коэффициента $k = tg\alpha$ распространяется и на случай, когда $k \le 0$.

На следующем уроке целесообразно выяснить физический смысл коэффициентов линейной функции. Работа происходит в том же исследовательском виде с использованием анимационного рисунка. На нем моделируется вертикальное равномерное движение шара C по закону $s = vt + b$, где t – время, а s – путь, пройденный за время t, $b \ge 0$. Одновременно строится график функции $s = vt$ (прямая OA). Из последнего равенства получаем $v = \dfrac{s}{t}$ – скорость движения. Изменяя на ползунке скорость v, наблюдаем движение шара с различными скоростями.

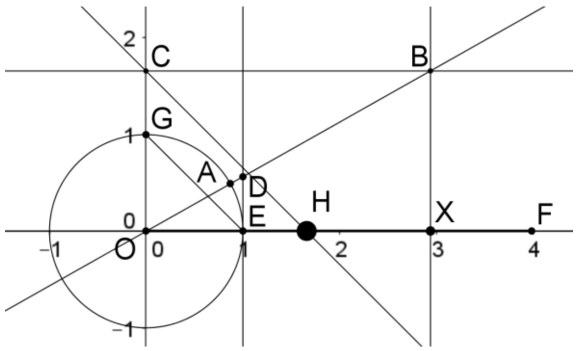


Рис. 5

При $t = 0$ получаем $s = b$– расстояние до начала движения.

Вертикальное движение вдоль оси ординат легко преобразовать в горизонтальное движение вдоль оси абсцисс (Рис. 5).

В качестве закрепления на наш взгляд будут полезными следующие задания:

1. Исследуйте (по коэффициентам) линейные функции:

а) $y = x–5$;

б) $y = –2x+3$;

в) $y = –x–4$;

г) $y = 0{,}2x+1$.

2. Какая из функций

а) $y = 3x–5$;

б) $y = 7/2x+2$;

в) $y = 0{,}7\,x+10$;

г) $y = 1/5x+1$.

Возрастает медленнее остальных; какая – быстрее остальных?

3. Известно, что при x=3 линейная функция $y = 2x+b$ принимает значение, равное 5. Чему равно значение функции при x=7?

4. Известно, что график функции $y = kx–6$ проходит через точку А(1;-4). Вычислите коэффициент k.

Правильность выполнения представленных заданий мы предлагаем проверить ученикам в GeoGebra.

2.2 Методика изучения квадратичной функции с использованием компьютерной анимации.

Квадратичная зависимость между переменными обнаруживается как в самой математике, так и в её приложениях в других науках и в технической практике. С помощью квадратичной функции выражаются законы многих явлений и процессов в природе и технике. Этим объясняется повышенное внимание к ней в школьной программе, которая предусматривает сначала изучение элементарными средствами (основная школа), затем – с помощью понятия производной (старшая школа). В основной школе учащиеся имеют возможность познакомиться с новыми свойствами функций; с построением и чтением более сложных графиков; с элементарными преобразованиями графиков; с решением простейших задач на максимум и минимум; с графическим способом решения квадратного уравнения и неравенства и др. Решение квадратного уравнения и неравенства целесообразно приблизить к изучению квадратичной функции, т. к. этот материал тесно взаимосвязан. Кроме того нужно подчеркнуть различие между понятиями «квадратное уравнение» и «квадратичная функция»: при решении уравнения $ax^2+bx+c=0$ мы находим те значения x (корни уравнения), при которых равенство обращается в тождество, а при изучении функции $y= ax^2+bx+c$ интересуемся законом, по которому каждому значению x соответствует определенное значение y (учащиеся часто смешивают эти понятия). Квадратичную функцию часто называют еще квадратным трехчленом, т. к. в правой части формулы он и записан.

Изучение квадратичной функции по традиции в основной школе проводится поэтапно. По числу выделяемых этапов учебники различаются. В учебниках Ю.Н. Макарычева и др. последовательность такова: $y=x^2$ (7-й класс), $y=ax^2$, $y=ax^2+n$, $y=a(x–m)^2$, $y=a(x–m)^2+n$, $y=ax^2+bx+c$ (9-й класс); в учебниках Ш.А. Алимова и др. весь материал сосредоточен в 8-м классе и особо выделяются три функции: $y=x^2$, $y=ax^2$, $y=ax^2+bx+c$. Постепенное рассмотрение графиков частных случаев квадратичной функции необходимо для нахождения наиболее рационального способа её построения, поскольку по выбранным точкам, принадлежащим графику, трудно установить его вид. Чтобы легче было определить точки, нужно преобразовать квадратный трехчлен, задающий функцию. На конкретном графическом материале учащиеся знакомятся с линейными преобразованиями графиков.

Заметим, что во всех учебниках алгебры излагаются свойства функций $y=x^2$ и $y=ax^2$, а также вытекающие из них особенности графиков. Исследование свойств квадратичной функции в общем виде не предусматривается. Исследование в общем виде переносится в старшую школу после изучения производной.

При изучении квадратичной функции графический метод разумно сочетается с аналитическим методом. К этому мы добавляем анимационно-геометрияеский метод.

Изучение семейства квадратичных функций начинается с $y=x^2$, связанной с действием возведения числа в квадрат. Учащиеся знакомятся с новым видом функциональной зависимости, отличным от линейной (графиком, его особенностями и свойствами), её график в дальнейшем поможет ввести понятия четности и монотонности функции, иррационального числа, установить неравномерный характер изменения значений функции и др. Мотивировкой изучения функции является задача об установлении зависимости площади квадрата от длины его стороны (Рис.6).

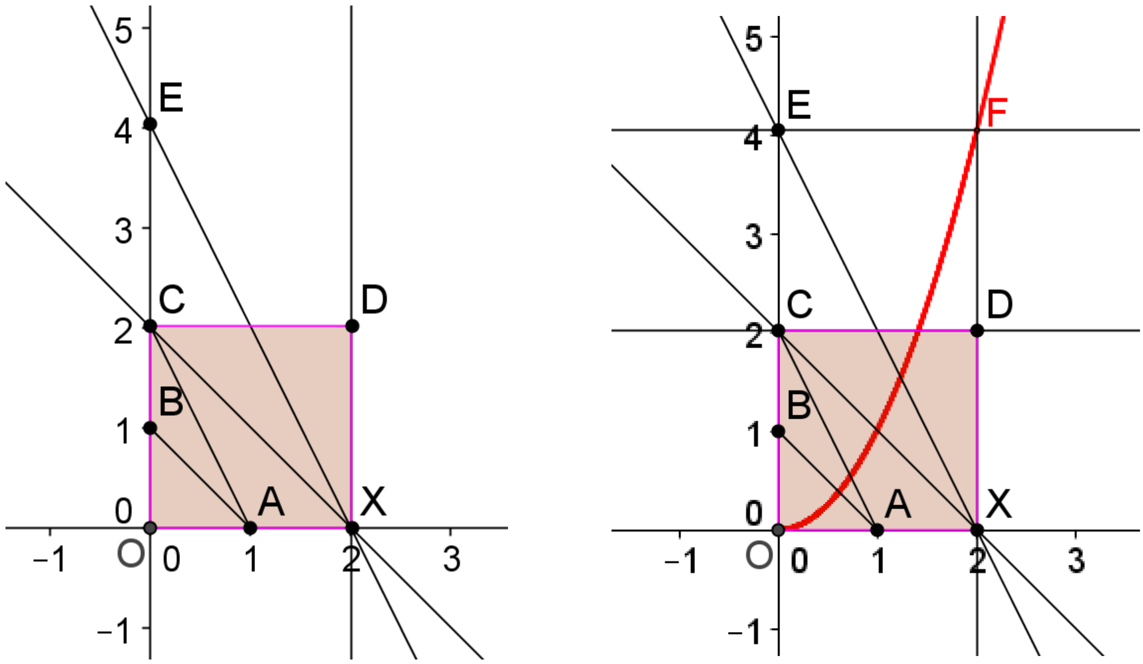


Рис.6

Построен квадрат со стороной OX, точка E по построению указывает число, равное площади квадрата. Построенная модель демонстрирует зависимость точки E (площади квадрата) от точки X (длины стороны этого квадрата): при перемещении точки X соответствующим образом изменяется положение точки E. На рисунке 2 в дополнение построена точка F. При анимации точки X происходит непрерывное вычерчивание графика данной зависимости.

При переходе к построению в тетрадях графика функции $y=x^2$ выбирается изначально большое числу точек, координаты которых заносятся в таблицу. Для большей точности построения нужно проследить, как график ведет себя вблизи начала координат, для чего полезно дополнительно выбрать еще несколько значений функции на отрезке [-1;1]. После нанесения точек на координатную плоскость и соединения их можно выявить некоторую плавную кривую линию. Дается название полученной линии –

парабола. Обращается внимание на то, что график неограниченно продолжается вверх справа и слева от оси ординат, а на рисунке мы изображаем только часть его. Привлекая анимационный рисунок, демонстрирующий вычерчивание графика, можно все обсуждаемые свойства сделать наглядными, что будет способствовать пониманию этих вопросов.

Исходя из формулы, таблицы и графика, формулируют свойства функции и графика, а также дают им обоснование.

Важно сразу же приучать учеников правильно изображать параболу при вершине (ошибочно рисуют заострением книзу) и завершении обеих ветвей (ошибочно далеко удаляют их от оси OY и с перегибом вправо и влево). Подчеркнуть, что парабола касается оси абсцисс в начале координат, график практически сливается с осью. На анимационном рисунке, можно это продемонстрировать, изменяя масштаб изображения.

В 8-м или 9-м классе вводится понятие квадратичной функции, рассматриваются её свойства, особенности графика и приёмы построения параболы, приводятся примеры квадратичной зависимости величин. Квадратичная функция определяется, как обычно, формулой $y=ax^2+bx+c$. Здесь же выясняются её частные случаи в зависимости от коэффициентов b и c (один или оба равны нулю); коэффициент $a\neq 0$ по определению. Учащиеся должны научиться распознавать квадратичную функцию по формуле и определять коэффициенты.

Изучение квадратичной функции начинается с частного случая $y=ax^2$ $(a\neq 0)$. При $a=1$ получаем уже знакомую функцию $y=x^2$, которая послужит своеобразным эталоном при изучении других функций. Уместно показать на двух-трех задачах потребность в особом изучении функции $y=ax^2$. Например, сопротивление среды движению тела (самолета, подводной лодки) пропорционально квадрату его скорости; путь, пройденный телом при равномерно-ускоренном (замедленном) движении, пропорционален квадрату времени; площадь круга пропорциональна квадрату радиуса.

Рассмотрение изменения площади прямоугольника с данным фиксированным отношением его сторон k, приводит к функции $S = ka^2$ (если стороны a и b прямоугольника связаны соотношением $b = ka$, то его площадь $S = ab = a \cdot ka = ka^2$). Мы построили анимационный чертеж, на котором изображен прямоугольник со сторонами a и $b = ka$ (параметр k регулируется «ползунком»), непрерывно вычерчивается график зависимости $S = ka^2$ и приводится таблица этой зависимости.

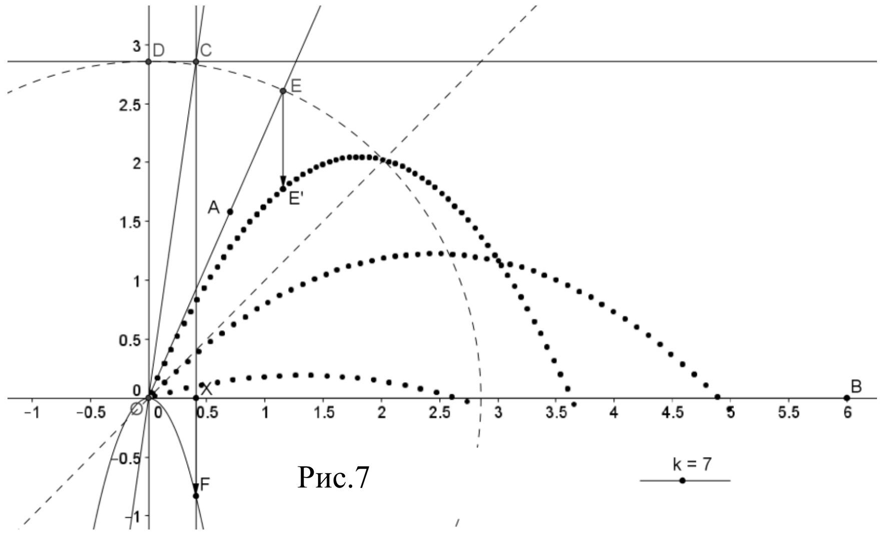


Рис.7

Камень, брошенный под углом к горизонту, или снаряд, выпущенный из пушки, летят по траектории, связанной с параболой (Рис.7).

Построим модель движения снаряда, выпущенного из пушки (начала координат) под регулируемым углом к поверхности земли (к оси абсцисс).

1. Строим луч OA (направление выстрела).

2. Задаем (ползунком) параметр k (скорость равномерного движения снаряда без учета гравитации) и строкой ввода строим график функции $y = kx$ (зависимость расстояния y от времени x при равномерном движении с постоянной скоростью k).

3. На оси абсцисс строим отрезок OB и отмечаем на нем точку X, изображающую переменную x. Задаем анимацию этой точки. При включении анимации точка X будет *равномерно* двигаться по отрезку (именно с этой целью мы строим X на отрезке, а не на всей оси абсцисс).

4. Строим вертикаль через точку X и отмечаем точку C пересечения вертикали с графиком функции $y = kx$.

5. Через точку C проводим горизонталь и отмечаем точку D пересечения ее с остью ординат. При анимации точки X точка D будет передвигаться по оси ординат по закону $y = kx$.

6. «Переносим» движение точки D на луч OA. Для этого проводим окружность с центром в начале координат и радиусом OD, отмечаем точку E пересечения окружности и луча OA. При включении анимации точки X получаем равномерное движение снаряда E в заданном направлении OA (без учета гравитации).

7. Для учета гравитации строим график равноускоренного движения $y = -5x^2$ (график свободного падения с ускорением $g = 10\, м/сек^2$). Отмечаем точку F пересечения параболы с вертикалью, строим вектор $\overrightarrow{XF}$ и вектор $\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{XF}$. Заставляем точку E' оставлять след. Построение закончено.

При анимации точки X точка E', оставляя след, вычерчивает траекторию движения снаряда, выпущенного из начала координат в направлении луча OA.

Для нахождения наибольшей дальности полета снаряда строим биссектрису координатного угла. Для демонстрации стрельб линии построения можно спрятать. Скорость k можно регулировать.

В этом примере ученик видит как само движение, так и графики, описывающие отдельные составляющие этого сложного движения.

Вызвав познавательный интерес к функции, можно её изучение начать с выяснения влияния коэффициента *($a\neq1$)* на поведение функции (иначе говоря установление геометрического смысла a) при $a>1$, $0<a<1$, $a<0$. Такую работу целесообразно организовать с использованием компьютерной среды GeoGebra. Для этого необходимо предложить ученикам в одной системе координат построить графики функции $y=ax^2$ при различных значениях a ($a=1; 2; 0,5; -2$) и после построения заполнить таблицу.

№	Функция	Значение аргумента							Результат сравнения с $y=x^2$
		-3	-2	-1	0	1	2	3	
1	$y=2x^2$								
2	$y=0,5x^2$								
3	$y=-2x^2$								

Предложить сравнить значения функций по таблице и на графике для одних и тех же значений аргумента, выяснить особенности расположения графиков в сравнении с графиком при $a=1$.

Непосредственно можно убедиться, что ветви параболы (1) располагаются «ближе» к оси *ОУ*, сжимаются, тогда как ветви графика (2) располагаются «дальше» от *ОУ*, растягиваются, в сравнении с $y=x^2$. Графики (1) и (3) «похожи между собой», но ветви направлены в разные стороны, график (3) есть «зеркальное отражение» графика (1).

Учащиеся знакомятся с понятиями растяжения и сжатия графика, однако отработка этих преобразований не приводится. Говорится о симметрии графиков относительно оси абсцисс при $a>0$ и при $a<0$. От величины коэффициента а зависит степень крутизны параболы: большему значению а соответствует более «крутая» парабола, меньшему – более «пологая», а от его знака – направление ветвей параболы. После выяснения особенностей расположения параболы формулируются свойства функции $y=ax^2$ при $a>0$ и при $a<0$, выясняется их общность и различие. Желательно свойства представить в виде таблицы с двумя колонками.

Изучение двух других частных случаев квадратичной функции $y=ax^2+n$ и $y=a(x-m)^2$ происходит по аналогии с первым случаем, но здесь главное внимание обращается на построение графиков, а свойства их остаются в тени. Эталоном для сравнения будет выступать уже функция $y=ax^2$ $(a\neq 1)$. Рассуждения все ведутся на конкретных примерах функций. Для первого случая можно выбрать $y=2x^2$, $y=2x^2+2$, $y=2x^2–2$, для второго – $y=2x^2$, $y=2(x–2)^2$, $y=2(x+2)^2$. Для экономии времени эту работу лучше осуществлять в среде GeoGebra. Из наглядных соображений устанавливают, что графиком функций $y=ax^2$, $y=ax^2+n$ и $y = a(x – m)^2$ является одна и та же парабола, в последних двух случаях она получена из первой путем параллельного переноса вдоль оси абсцисс.

После рассмотрения двух частных случаев квадратичной функции можно перейти к изучению ее в общем виде. Понимание расположения ее графика в системе координат облегчается за счет предварительного ознакомления с графиками функций $y=ax^2+n$ и $y=a(x– m)^2$. Исходя из задания квадратичной функции квадратным трехчленом $y=ax^2+bx+c$ и возможности представить его в виде квадрата двучлена $y=a(x–m)^2+n$, можно функцию записать иначе как $y=a(x – m)^2 +n$.

Рекомендуется строить графики различными способами, в том числе с использованием компьютера. В учебниках внимание учащихся обращается на алгоритм построения графика, который рекомендуется начать с нахождения вершины параболы – точки A (m , n), проведения оси симметрии параболы x = m и составления таблицы координат нескольких точек параболы. При этом целесообразно абсциссы выбирать симметрично относительно оси параболы. Можно найти нули функции и точку пересечения параболы с осью ординат.

Полезно обратить внимание учеников на следующий момент: при решении квадратного уравнения $y=ax^2+bx+c =0$ можно изменять знаки у всех членов на противоположные и получить правильный ответ, а в правой части формулы, задающей функцию $y=ax^2+bx+c$, этого делать нельзя, т. к. будем иметь уже другую функцию, графиком которой будет парабола, симметричная прежней относительно оси абсцисс.

После введения понятия производной в старшей школе через систему упражнений учащиеся знакомятся с исследованием квадратичной функции на конкретных примерах в рамках темы «Применение производной к исследованию функций». Учащиеся должны уяснить, что аппарат производной значительно упрощает процесс нахождения характерной точки графика квадратичной функции – вершины параболы (вместо выделения полного квадрата достаточно продифференцировать функцию), промежутков монотонности (вычисления на основе определения заменяются выяснением знака производной). Облегчается деятельность по решению прикладных задач на экстремум, когда исследуемая величина выражается квадратичной функцией, которая в области определения содержит единственную точку экстремума и соответствующее ей значение функции наибольшее или наименьшее.

График квадратичной функции позволяет находить решение квадратичных неравенств. Традиционно знакомство с этим способом проводится сразу же после изучения свойств функции, т. к. задача о решении неравенства, например $y=ax^2+bx+c>0$, может быть переформулирована в задачу о нахождении промежутков, на которых функция $y=ax^2+bx+c$ принимает положительные значения. При таком способе решения достаточно установить расположение параболы относительно оси абсцисс без нахождения координат ее вершины. Анализируя возможные случаи геометрического решения строгих квадратных неравенств, надо подчеркнуть, что их решение определяется знаком коэффициента a и дискриминанта D.

Полезным будет рассказать учащимся, что если вращать параболу вокруг ее оси симметрии, то получится поверхность, которую называют параболоидом вращения. Это можно продемонстрировать на соответствующем анимационном рисунке.

Если согнуть узкую полоску хорошо отполированного металла по дуге параболы и направить пучок лучей, параллельных оси на эту параболу, то после отражения все лучи соберутся в фокусе параболы.

И наоборот: все лучи, исходящие из источника света, находящегося в фокусе данной параболы, после отражения оказываются направленными параллельно ее оси.

Эти свойства параболы используются при изготовлении прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков, зеркал, которые имеют вид параболоидов вращения.

Параболические зеркала и другие аналогичные им приспособления, использующие описанное свойство параболы, изготовляются в форме параболоида.

Если же требуется, для решения той или иной практической задачи направить параллельный пучок радиоволн или принять их, то употребляют металлические антенны, основанные на том же принципе, что и параболические зеркала. Это сходство неслучайно, свет и радиоволны имеют одинаковую физическую природу. Подобные антенны находят широкое применение в таких областях науки и техники, как радиолокация и радиоастрономия.

Некоторые космические тела, такие как кометы или астероиды, проходящие вблизи крупных космических объектов на высокой скорости, имеют траекторию движения в форме параболы. Скорость примерно равна 11,2 км/с и называется параболической или космической скоростью. Масса таких тел мала, а скорость велика. Поэтому они не захватываются гравитационным полем планет (звезд) и продолжают свободный полет. Это свойство малых космических тел используется при гравитационных маневрах космических кораблей.

А для тренировок будущих космонавтов, на земле проводятся специальные полеты самолетов по траектории параболы, чем достигается эффект невесомости в гравитационном поле Земли.

В качестве задач по формированию функциональных понятий можно привести следующие:

Задача 1. Из имеющихся досок можно построить забор длиной в 200м. требуется отгородить этим забором прямоугольный двор наибольшей площади, используя для одной стороны заводскую стену.

Обозначив площадь двора через S ($м^2$), а длину стороны, перпендикулярной к заводской стене, через x($м$), находим, что

$$S=(200-2x)x=-2x^2+200x,$$

Где $0< x<100$. Отметим, что зависимость S от x – квадратичная и

$a= -2<0$, устанавливаем, что эта зависимость имеет максимум при

$x= -b/2a= -200\backslash-4=50$. Одновременно выясняем, что при стороне x площадь двора сначала увеличивается, достигая наибольшего значения $S=5000$ $м^2$ при $x= 50$ $м$, а затем при дальнейшем увеличении стороны уменьшается до нуля.

Иллюстрация этой задачи в среде GeoGebra показывает, как при изменении стороны (отрезок DA) меняется площадь S, что позволяет удостовериться, что фигура максимальной площади – квадрат (Рис.8).

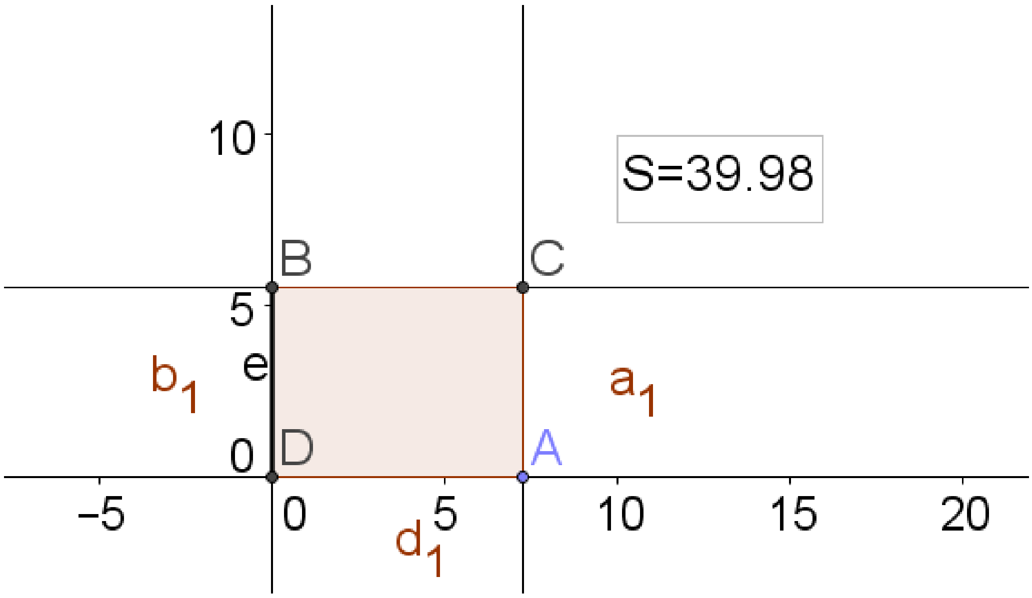


Рис. 8

Задача 2. Из цилиндрического бревна надо выпилить прямоугольный брус наибольшего объема. Какой формы должно быть сечение?

Отметим, что объем бруса будет иметь наибольшее значение тогда, когда площадь *S* его сечения будет наибольшей. Выражаем зависимость этой площади от длины *x* одной из сторон поперечного сечения бруса, например стороны AD.

Обозначив радиус бревна через R, находим, что $CD=(4R^2- x^2)^{1/2}$. Площадь сечения *S* теперь выражается формулой $S=x(4R^2- x^2)^{1/2}$. Выполнив преобразования и заменив $x^2=y$, получим $S=(-y^2+4R^2y)^{1/2}$. Затем выясняем, что *S* достигает максимума одновременно с подкоренным выражением. Этот максимум достигается при $y = -4R^2/-2= 2R^2$, или при $x^2= 2R^2$. т.е. при $x= R2^{1/2}$, т.е. AD= CD. Из полученного равенства, заключаем, что сечение бруса должно быть квадратным. Возможности GeoGebra позволяют экспериментальным путем убедиться в правильности решения и увидеть график, который будет вычерчиваться при соответствующих изменениях *x* (Рис.9).

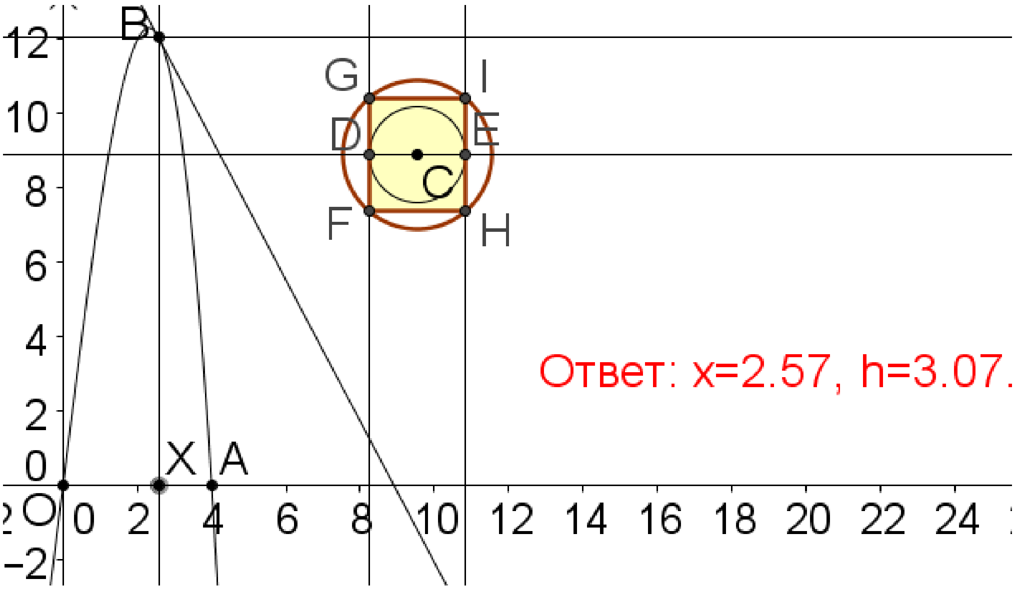
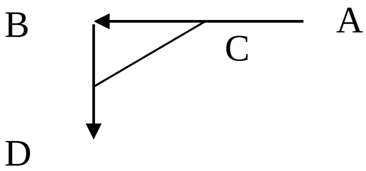


Рис.9

Задача 3. Из точек A и B по указанным стрелками направлениям выходят одновременно два парохода со скоростями 20 *км/ч* и 16 *км/ч*.



Через сколько времени расстояние между ними окажется наименьшим, если AB=60 *км/ч*?

Обозначим расстояние между пароходами через CD, а время прошедшее с момента их выхода, через t, последовательно находим, что $DC^2=BC^2+BD^2$; BC=60–20t; BD=16t; $DC=((60-20t)^2+(16t)^2)^{1/2}$. Заметим, что DC достигает минимума одновременно с подкоренным выражением, устанавливаем, что наименьшее расстояние между пароходами будет при

$$t = -b\backslash 2a = -2400\backslash 2\cdot 656 \approx 1{,}8\ ч.$$

2.3 Структура и содержание учебного модуля «Построение графиков функций».

Пояснительная записка учебного модуля «Построение графиков функций»

Школьное образование в современных условиях призвано обеспечить функциональную грамотность и социальную адаптацию обучающихся на основе приобретения ими компетентностного опыта в сфере учения, познания, профессионально-трудового выбора, личностного развития, ценностных ориентаций. Это предопределяет направленность целей обучения на формирование компетентной личности, способной к жизнедеятельности и самоопределению в информационном обществе, ясно представляющей свои потенциальные возможности, ресурсы и способы реализации выбранного жизненного пути.

Программа учебного модуля «Построение графиков функций» предназначена для учащихся 8-х классов как пропедевтический курс для дальнейшего изучения предмета "Алгебра и начала математического анализа" в старшей школе и свободного владения техникой построения графиков элементарных функций. На базе основной школы материал по теме: "Функции и их графики" представлен рассредоточенно, кроме того, многие важные моменты не входят в программу и, следовательно, не изучаются. Введение учебного модуля обусловлено тем, что количество уроков по предмету составляет необходимый минимум для изучения отдельных тем. И нет другой возможности углубить, расширить и систематизировать знания учащихся по теме: «Построение графиков функций». Следует отметить, что тесты итоговой аттестации за курс основной школы предполагают у выпускников наличие знаний и умений читать и строить графики элементарных функций, поэтому формировать основы этих знаний и умений необходимо начинать как можно раньше.

В рамках реализации модуля предполагается активное использование компьютерной среды GeoGebra, которое позволит повысить эффективность изучаемого материала за счёт наглядного представления графических данных; быстроты и точности построений; возможности использования и конструирования анимационных компьютерных моделей математических объектов и проведения, на их основе, компьютерных экспериментов и исследований; расширения комплекса учебных задач; повышения информационной культуры и активизации учебно-познавательной деятельности обучающихся.

Цель учебного модуля – прояснить, дополнить и «оживить» школьный материал, связанный с функциями и их графиками.

Задачи учебного модуля:

- Систематизация знания учащихся о функциях и их графиках;
- Развитие опыта построения графиков функций и выполнения их преобразований.
- Развитие умения рефлексивного прогнозирования результата: способности использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.
- Развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, в виде формул, на графиках, в учебниках, справочном дидактическом материале, Интернет.
- Приобретение опыта построения и исследования графиков функций в компьютерной среде GeoGebra.
- Воспитание устойчивого интереса к предмету за счёт чувственного восприятия математических понятий.
- Приобретение опыта самостоятельного конструирования задач по данной теме, их решения, презентаций на занятиях.

В модуле заложена возможность дифференцированного обучения, как путем использования задач различного уровня сложности, так и на основе различной степени самостоятельности освоения нового материала.

Следовательно, программа применима для самых разных групп школьников, в том числе, не имеющих хорошей математической подготовки.

Изучение учебного модуля способствует формированию у учащихся личностных, метапредметных и предметных результатов обучения, соответствующих требованиям федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования.

Личностные результаты:

1) ответственное отношение к учению, готовность и способность обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию;

2) осознанный выбор и построение дальнейшей индивидуальной траектории образования на базе ориентировки в мире профессий и профессиональных предпочтений с учётом устойчивых познавательных интересов, а также на основе формирования уважительного отношения к труду, развитие опыта участия в социально значимом труде;

3) умение контролировать процесс и результат учебной и математической деятельности;

4) критичность мышления, инициатива, находчивость, активность при решении математических задач.

Метапредметные результаты:

1) умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности;

2) умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией;

3) умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации;

4) умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы;

5) развитие компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий;

6) формировать представление об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники, о средстве моделирования явлений и процессов;

7) умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни;

8) умение находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических задач, и представлять её в понятной форме, принимать решение в условиях неполной или избыточной, точной или вероятностной информации;

9) умение понимать и использовать математические средства наглядности (графики, таблицы, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;

10) умение выдвигать гипотезы при решении задачи, понимать необходимость их проверки;

11) понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом.

Предметные результаты:

1) осознание значения математики для повседневной жизни человека;

2) представление о математической науке как сфере математической деятельности, об этапах её развития, о её значимости для развития цивилизации;

3) развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования;

4) владение базовым понятийным аппаратом по основным разделам содержания;

5) систематизировать знания о функциях и их свойствах.

Тематическое планирование модуля

№	Название темы	Количество часов
1.	Понятие функции и ее графика, способы задания функций.	1
2.	Линейная функция и её график. Исследование графика функции в сопровождении с компьютерным моделированием в среде GeoGebra. Модели движений, задаваемых линейными функциями.	1
3.	Геометрические преобразования графика функции: – преобразование симметрии относительно оси x – преобразование симметрии относительно оси y – параллельный перенос вдоль оси x – параллельный перенос вдоль оси y – сжатие и растяжение вдоль оси x – сжатие и растяжение вдоль оси y. Моделирование преобразований в среде GeoGebra.	3

4.	Квадратичная функция и её график. Анимационное вычерчивание графика в среде GeoGebra. Построение графика квадратичной функции с помощью элементарных преобразований. Моделирование преобразований в среде GeoGebra.	2
5.	Степенная функция, построение графика степенной функции с натуральным показателем: – четный показатель, – нечетный показатель. Анимационное вычерчивание графика в среде GeoGebra.	1
6.	Построение графика степенной функции с целым отрицательным показателям степени: – четный показатель – нечетный показатель	1
7.	Дробно-линейная функция, свойства и график. Анимационное вычерчивание графика в среде GeoGebra и его преобразования.	2
8.	Построение графиков, содержащих модуль на основе геометрических преобразований. – построение графика функции $y = f(\|x\|)$ – построение графика функции $y = \|f(x)\|$ Анимационное вычерчивание графика в среде GeoGebra.	2
9.	Функция у=$\sqrt{x}$, свойства и график в среде GeoGebra..	2
10.	Графики кусочно-заданных функций. Подготовка к ОГЭ.	1
11.	Построение графиков сложных функций.	1

	Рисование графиками в среде GeoGebra.	
12.	Итоговое занятие.	1
Итого		**18**

Методическое планирование учебного модуля

Тема 1. Понятие функции и графика, способы задания функций.

Дидактические цели:

1. Актуализировать понятие функциональной зависимости.

2. Актуализировать определение независимой переменной (аргумента), зависимой переменной (функции), определение области определения функции, множества значений.

3. Отработать умение находить значение функций, заданных аналитически.

Учебные задания:

Демонстрация и разъяснение моделей, выполненных в GeoGebra, приводящих к понятию функция.

Нахождение области определения функции, множества значения.

Определение принадлежности точки графику.

Методическое обеспечение процесса обучения:

Фронтальный опрос, метод демонстрации (модели), устные и письменные упражнения; использование анимационных моделей компьютерной среды GeoGebra.

Тема 2. Линейная функция и её график. Исследование графика функции.

Дидактические цели:

1. Актуализировать понятие линейной функции и её свойства.

2. Актуализировать умение выполнять построение графика линейной функции.

3. Познакомить с алгоритмом исследования графика функции.

Учебные задания:

Построение графика функции в среде GeoGebra и проведение исследовательской работы с использованием опорной карточки.

Выдвижение гипотезы о внешнем виде графика функции в зависимости от коэффициентов.

Сопоставление результатов личностного исследования с выводами работы других групп.

Составление алгоритма исследования графика функции на примере линейной.

Методическое обеспечение процесса обучения:

Исследовательская, групповая работа, работа в GeoGebra .

Тема 3. Геометрическое преобразование графика функции.

Дидактические цели:

1. Систематизировать теоретические знания по теме «Функция».
2. Формировать умения выполнять преобразования графиков.
3. Познакомить с алгоритмом проведения исследования функции и закрепить его применение.

Учебные задания:

Выдвижение гипотез о виде графика функций при выполнении преобразований.

Построение в тетради графиков данной функции и после применения преобразований.

Сопоставление полученных результатов в тетради и в программе GeoGebra.

Анализ вида графика при осуществлении преобразований плоскости и формулировка правил.

Выполнение самостоятельной работы.

Методическое обеспечение процесса обучения:

Эвристическая беседа, индивидуальная работа, работа в GeoGebra.

Тема 4. Квадратичная функция и её график. Построение графика квадратичной функции с помощью элементарных преобразований.

Дидактические цели:

1. Актуализировать понятие квадратичной функции, её графика и свойств.

2. Актуализировать формулы сокращенного умножения.

3. Познакомить и закрепить построение квадратичной функции с помощью элементарных преобразований.

Учебные задания:

Демонстрация моделей задач, приводящих к понятию квадратичной функции, выполненные в GeoGebra.

Использование формул сокращенного умножение для выделения полного квадрата. Определение свойств графика функции по формуле.

Построение в тетради и на экране компьютера графиков квадратичной функции, используя математические преобразования.

Сопоставление полученных результатов в тетради и в программе GeoGebra.

Методическое обеспечение процесса обучения:

Практическая работа, объяснение нового материала, работа в GeoGebra.

Тема 5. Степенная функция, построение графика степенной функции с натуральным показателем.

Дидактические цели:

1. Ввести понятие степенной функции с натуральными показателем.

2. Рассмотреть свойства степенной функции.

3. Провести исследования функции.

4. Выполнить построение графика функции.

Учебные задания:

Демонстрация модели графика степенной функции с натуральным показателем в GeoGebra.

Проведение компьютерного эксперимента в GeoGebra с использованием опорных вопросов для выявления и формулировки свойств графика функций.

Построение графиков степенной функции с натуральным показателем.

Сопоставление полученных результатов в тетради и в программе GeoGebra.

Методическое обеспечение процесса обучения:

Исследовательская работа, эвристическая беседа, работа в GeoGebra.

Тема 6. Построение графика степенной функции с целым отрицательным показателем степени.

Дидактические цели:

1. Ввести понятие степенной функции с целым отрицательным показателем степени.

2. Рассмотреть свойства степенной функции.

3. Провести исследования функции.

4. Выполнить построение графика функции.

Демонстрация модели графика степенной функции с натуральным показателем в GeoGebra.

Проведение компьютерного эксперимента в GeoGebra с использованием опорных вопросов для выявления и формулировки свойств графика функций.

Построение графиков степенной функции с натуральным показателем.

Сопоставление полученных результатов в тетради и в программе GeoGebra.

Методическое обеспечение процесса обучения:

Исследовательская работа, эвристическая беседа, работа в GeoGebra.

Тема 7. Дробно-линейная функция, свойства и график.

Дидактические цели:

1. Формирование понятия о дробно – линейной функции, её свойствах.

2. Формирование умения выполнять построение дробно – линейной функции.

Учебные задания:

Демонстрация и разъяснение моделей GeoGebra, приводящих к дробно – линейной функции функции.

Проведение исследовательской работы, выдвижение гипотезы о виде предложенных графиков функций.

Проведение компьютерного эксперимента в GeoGebra.

Выполнение математических преобразований, построение и исследование графиков функции.

Методическое обеспечение процесса обучения:

Объяснение нового материала, практическая работа, работа в GeoGebra.

Тема 8. Построение графиков, содержащих модуль на основе геометрических преобразований.

Дидактические цели:

1. Актуализация темы модуля.

2. Знакомство с алгоритмом построения графика функции, содержащей модуль.

Учебные задания:

1. Раскрытие темы модуля.

2. Построение графиков на бумаге и проверка правильности построения в GeoGebra.

Методическое обеспечение процесса обучения:

Практическая работа, работа в GeoGebra.

Тема 9. Функция y=$\sqrt{x}$, свойства и график.

Дидактические цели:

1. Формирование понятия о функция y=$\sqrt{x}$, её свойствах.
2. Формирование умения строить график функции y=$\sqrt{x}$.

Учебные задания:

Ввод функции y=$\sqrt{x}$. Демонстрация графика, проведение исследования функции.

Выполнение построения. Проведение исследования в GeoGebra..

Методическое обеспечение процесса обучения:

Объяснение нового материала, практическая работа, работа в GeoGebra.

Тема 10. Графики кусочно-заданных функций. Подготовка к ОГЭ.

Дидактические цели:

1. Знакомство с кусочно-заданными функциями.

2. Решение заданий №23 из ОГЭ.

Учебные задания:

1. Выполнение построений.

2. Проверка в GeoGebra.

Методическое обеспечение процесса обучения:

Практическая работа, работа в GeoGebra.

Тема 11. Построение графиков сложных функций. Рисование графиками.

Дидактические цели:

1. Познакомить учащихся с графиками сложных функций.

Учебные задания:

1. Представление индивидуальных работ.

2. Построение графиков сложных функций.

Методическое обеспечение процесса обучения:

Выступление с докладом, практическая работа.

Тема 12. Итоговое занятие.

Дидактические цели:

Закрепление изученных функций, их свойств и графиков.

Учебные задания:

Выполнение дифференцированной практической работы.

Методическое обеспечение процесса обучения:

Практическая работа.

Выводы по Главе II

Изучение линейной и квадратичной функции можно сделать более эффективным благодаря использованию динамической среды GeoGebra. Её применение возможно на разных этапах урока: актуализация знаний, объяснение нового материала, закрепление. В качестве примера приведены задачи и упражнения, позволяющие организовать такую работу, представлена методика изучения линейной и квадратичной функций с использованием компьютерной анимации. Представлена структура и содержание о учебного модуля «Построение графиков функций» в школьной математике, которая состоит из: пояснительной записки, включающей в себя цель, задачи и результаты изучения учебного модуля; тематического планирования и методического планирования.

Заключение

Анализ развития образовательной системы показал, что реализация принципов современного образования происходит в процессе внедрения в эту систему современных информационных технологий. Фактически под воздействием этих технологий складывается принципиально новая образовательная система, в которой преодолеваются ограниченности традиционной системы образования. Формирование новой системы образования приводит к необходимости пересмотра идей и сути образования в современном мире, основных тенденций его развития, месте в жизни человека и общества.

Всё большую популярность в математике обретают информационные технологии, позволяющие создавать анимационные объекты реальной действительности. Компьютерная среда GeoGebra соответствует этим задачам, она проста в использовании и доступна.

В школьном курсе математики изучение программного материала по теме «Функция» дает учащимся понять, что функция – это математическая модель, позволяющая описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными величинами. Для того чтобы сделать обучение функциям более эффективным целесообразно использовать компьютерную среду GeoGebra, которая позволит смоделировать движение – источник функциональной зависимости.

В состав диссертации входит Приложение на диске, состоящее из дидактического материала к урокам в виде анимационных файлов, созданных в среде GeoGebra.

Систематическое использование среды GeoGebra вносит новую динамическую составляющую в дидактику математического образования.

Личный опыт применения представленной в диссертации методической системы использования анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra при изучении функций в 7-9 классах общеобразовательной школы, результаты апробации в виде выступлений на научном семинаре кафедры алгебры, геометрии и методики их преподавания, а также публикации автора дают основание утверждать, что высказанная во введении рабочая гипотеза об эффективности системы в деле повышения уровня усвоения материала и познавательного интереса к изучаемой теме нашла на наш взгляд свое полное подтверждение.

Библиографический список

1. А. Н. Колмогоров Что такое график функции? // Квант, 1970. № 1С.27-29.
2. Барановский Ю.С. Новая дисциплина «Введение в педагогическую информатику» в структуре многоуровневого педагогического образования// Педагогическая информатика №2. 1995 С.18-29
3. Башмаков, М. И. Изучение алгебры в 7 – 9 классах : кн. для учителя / М. И. Башмаков. М. : Просвещение, 2007. С.131 – 134, 139 – 146.
4. Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в средней школе : сб. ст. / сост. Е. Г. Глаголева, О. С. Ивашев-Мусатов. М. : Просвещение, 1980. С. 165 – 229.
5. Дорофеев Г.В., учебник Алгебра 7 класс под ред. Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др. – М: «Просвещение», 2014.
6. Г. В. Дорофеева Понятие функции в Математике и в школе//Математика в школе, 1978. № 2 С.10-27
7. Г. Е. Шилова Что такое функция?//Математика в школе. 2003. № 1. С. 4 – 10
8. Дронова Д., Калягин Е., Сергеев А. Информационные и интерактивные технологии в работе современного педагога [Электронный ресурс]. URL: si-sv.com/NIRS/forum-2013/34.pdf (дата обращения: 27.10.2016).
9. Дьяченко С.А. Использование интегрированной символьной системы Mathematica в процессе обучения высшей математике в вузе: Дисс. канд. пед. наук. Орел, 2000. – 164 с.
10. Е.Е. Деттерер Изучение линейной функции с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra / Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск, 16-17 ноября 2016г. / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол.; КГПУ им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2016.

11. Е.Е. Деттерер Использование анимации в среде GeoGebra при изучении функций в школьной математике/ Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы II Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск, 16-17 ноября 2013г. / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол.; КГПУ им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2013.

12. Еврезов Д.В. Образование в условиях информационной глобализации. Новосибирск: НГПУ, 2013.

13. Захарова, И.Г. Информационные технологии в образовании: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений/ И.Г. Захарова. - 2-е изд., стереотип. - М.: Академия, 2005, 2007, 2008, 2012. - 192 с. 29.

14. Изучение алгебры в 7 – 9 классах : кн. для учителя / Ю. М. Колягин [и др.]. М. : Просвещение, 2004. С.80 – 89, 160 – 179, 217 – 265.

15. Ильина Н.Ф. Инновации в образовании: учебное пособие. Краснояр. гос. пед. ун- т им. В.П. Астафьева – Красноярск: 2011. 8.

16. Ильина Н.Ф. Методология и методика научных исследований: учебно- методическое пособие. Красноярск: КГПУ им. В. П. Астафьева, 2012. 100 с.

17. Касторнова В.А., Ларина О.В., Везиров Т.Г. Информатизация и компьютеризация образовательного процесса. Сиб. федер. ун-т; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск: Центр информации, ЦНИ «Монография», 2014.

18. Кожухар В.М. Основы научных исследований: учебное пособие. М.: Дашков и К, 2012. 216 с.

19. Курбатов, Р. И. Школа, построенная на познавательном интересе ребенка: управленческие методы, педагогические приемы, конкретные модели работы учителя: методическое пособие/ Р. И. Курбатов. – М.: Чистые пруды, 2009. - 32 с

20. Л. А. Горина «О развивающем потенциале функционально-графической линии в курсе алгебры основной школы»//Математика в школе. 2011. № 2. С. 69 – 73

21. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. специальностей пед. ин-тов / Е. И. Лященко [и др.] ; под. ред. Е. И. Лященко. М. : Просвещение, 1988. 223 с.

22. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Легион, 2015. – 192с. – (Мастер-класс).

23. Ларин, С.В. Вычисления с помощью виртуальных геометрических инструментов / С.В. Ларин // Математика в школе – №8, 2007, с. 35-43.

24. Майер В.Р. Методическая система геометрической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий: монография. – Красноярск: РИО КГПУ, 2001. – 368с.

25. Майер В.Р., Крум Е.В. Информационные технологии в обучении проективной геометрии будущих учителей математики // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2014, №1 (73), стр. 92-95.

26. Майер Р.А. Задачи по формированию функциональных понятий – М: «Просвещение», 1965. – 111с.

27. Майер Р.А. Из опыта изучения свойств функций в восьмилетней школе– М: ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР, 1963. – 111с.

28. Макарычев, Ю. Н. Изучение алгебры в 7 – 9 классах : кн. для учителя / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, С. Б. Суворова. – М. : Просвещение, 2006. С. 18 – 30, 147 – 158, 172 – 194.

29. Математика. 7 класс : метод. пособие к учеб. комплекту под ред. Г. В. Дорофеева «Математика 7» / С. Н. Кадилова, Т. В. Колесникова, А. Н. Тернопол ; под ред. С. Б. Суворовой. – М. : Дрофа, 2000. – С. 92 – 98.

30. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под науч. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходо-вой. М. : Дрофа, 2005. С. 256 – 267, 370 – 395.

31. Методика и технология обучения математике. Курс лекций : пособие для вузов / под науч. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. М. : Дрофа, 2005. С. 256 – 267, 370 – 395.

32. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. специальностям / А. Я. Блох [и др.] ; сост. В. И. Мишин. М. : Просвещение, 1987. – С. 43 – 44, 151 – 227.

33. Методика преподавания математики в средней школе: частные методики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю. М. Колягин [и др.] М. : Просвещение, 1977. С.111 – 145, 285 – 369.

34. Мордкович, А. Г. Алгебра. 7 – 9 класс : метод. пособие для учителя / А. Г. Мордкович. М. : Мнемозина, 2000. С. 8 – 35, 47 – 55, 69 – 74, 110 – 119.

35. Официальный сайт программы GeoGebra. URL: http://www.geogebra.org/cms (дата обращения: 02.02.17).

36. Планирование обязательных результатов обучения математике / Л. О. Денищева [и др.] ; сост. В. В. Фирсов. М. : Просвещение, 1989. С. 39 – 40, 62 – 68, 84 – 93

37. Преподавание алгебры в 6 – 8 классах : сб. ст. / сост.: Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. М. : Просвещение,1980. С. 63 – 76, 208 – 213, 219 – 221

38. Примерные программы по учебным предметам. Математика. 5 – 9 классы : проект. М. : Просвещение, 2011. 64 с. – (Стандарты второго поколения).

39. Семенов А.Л. «Преподавать математику в школах будут по-новому» [Электронный ресурс] URL: http://www.edu.ru/ (дата обращения: 02.03.2015).

40. Сластёнин, В.А. Психология и педагогика: учебное пособие / В.А. Сластёнин, В.П. Каширин. – М., 2001.

41. Современные образовательные технологии: дополнительная профессиональная образовательная программа: учебные программы/ сост. Н.И. Пак [и др.]. - Красноярск: КГПУ им. В. П. Астафьева, 2008. - 52 с.

42. Современные образовательные технологии: учеб. пособие / кол. авторов; под ред. Н.В. Бордовской. –М.: Кнорус, 2010.–432с. 51. Сластенин, В. А.. Педагогика: учебник для студентов высших учебных заведений/ В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов. - 9-е изд., стер.. - М.: Издательский центр "Академия", 2008. - 576 с.

43. Стандарт ФГОС ООО www.standart.edu.ru

44. Теоретические основы обучения математике в средней школе : учеб. пособие / Т. А. Иванова [и др.] ; под ред. проф. Т. А. Ивано-вой. Н. Новгород : НГПУ, 2003. 320 с.

45. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования, 2012 г.

46. Филатов О.К. Информатизация технологий обучения в высшей школе / О.К. Филатов. -М., 1999. 198 с.

47. Фундаментальное ядро содержания общего образования / под ред. В. В. Козлова, А. М. Кондакова. М. : Просвещение, 2011. 59 с.

48. Хуторской А.В.. Педагогическая инноватика: учебное пособие для студ. высших учеб. заведений. –М.: Издательский центр «Академия», 2008. –256 с. 54.

49. Хуторской, А. В.. Современная дидактика: учебное пособие/ А. В. Хуторской. - 2-е изд., перераб.. - М.: Высшая школа, 2007. - 639 с. 23.

50. Цифровые образовательные ресурсы в школе: методика использования. Математика и информатика: сборник учебно-методических материалов для педагогических вузов / под общ. ред. Ю.А. Дробышева. М.: Университетская книга, 2008. – 304 с. – (Библиотека информатизации образования)

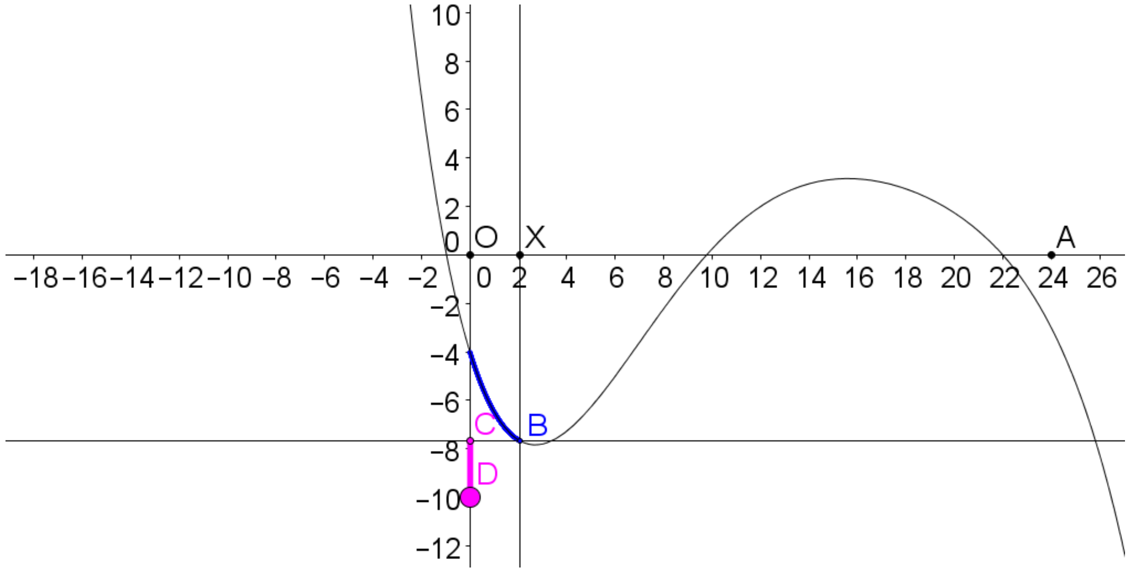
51. Шарыгин И.Ф. Математическое образование: вчера, сегодня, завтра…// Научно-просветительский журнал Скепсис. 2006. [Электронный ресурс] http://scepsis.net/library/id_638.html (дата обращения: 02.02.2017)

52. Шашкина М.Б. Особенности использования информационных технологий в подготовке будущего учителя математики на современном этапе // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2013. № 1. С. 228–231.

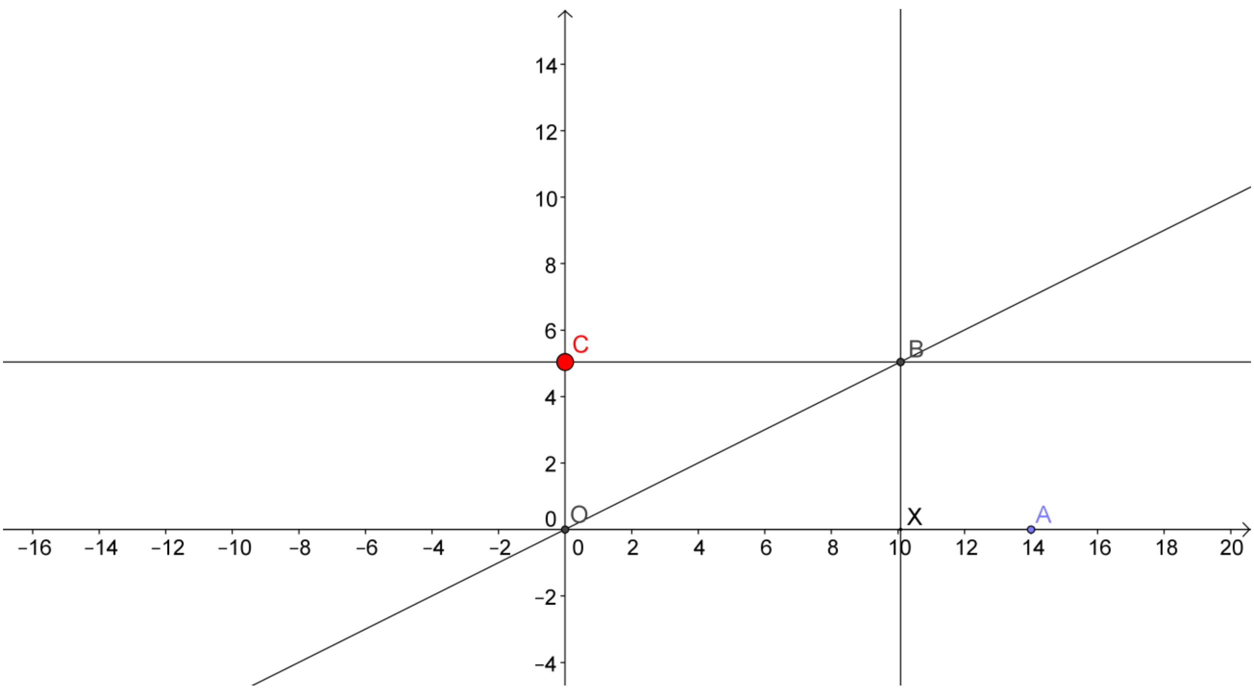
53. Шашкина М.Б., Багачук А.В. Исследовательская работа студента: учебное пособие. [Электронное издание]. Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2015.

Приложение

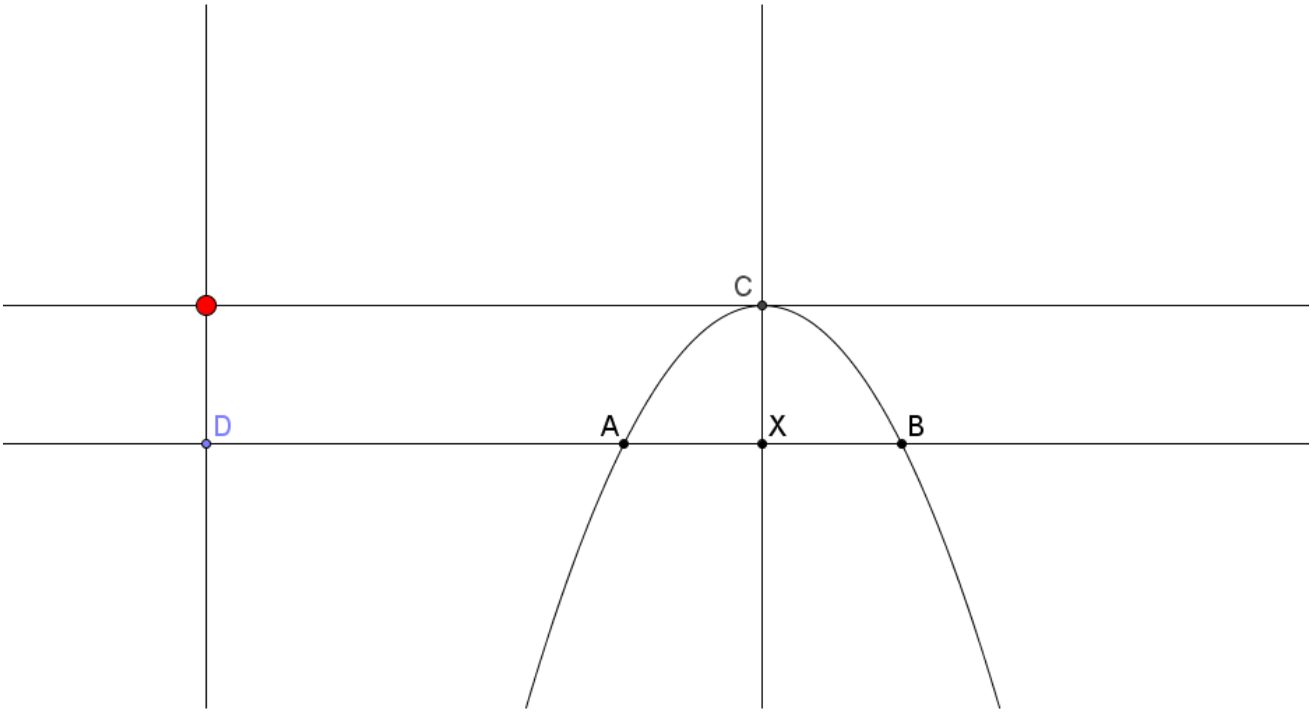
График температур



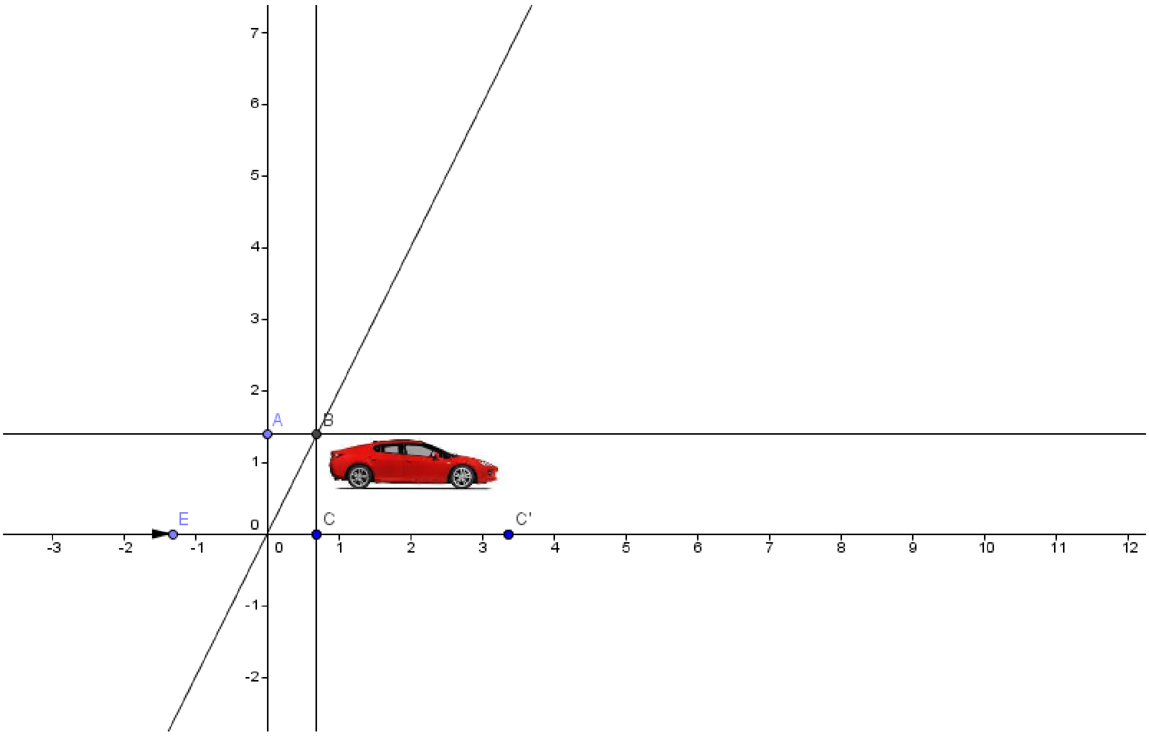
Полёт воздушного шарика



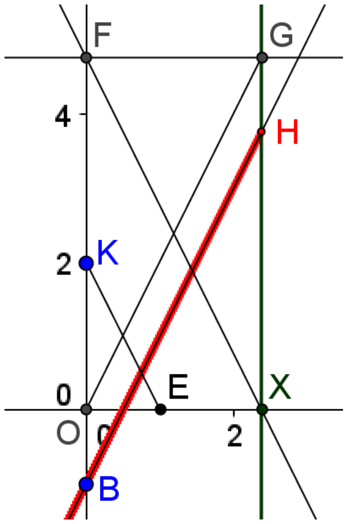
Анимация и график подпрыгивающего мяча



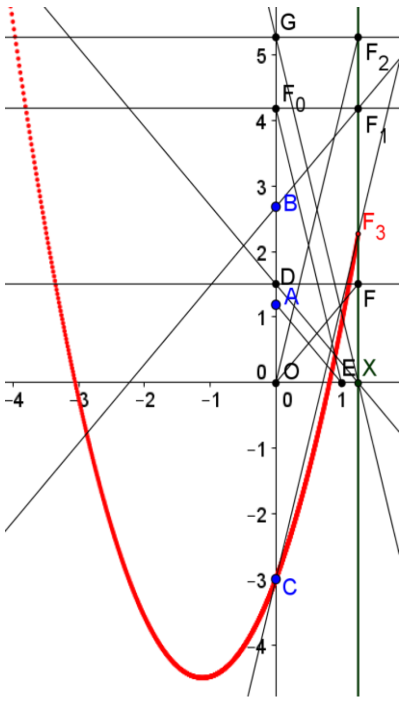
Движение автомобиля



Прибор для автоматического вычерчивания линейной функции



Прибор для автоматического вычерчивания параболы



Соответствующие анимационные рисунки представлены на диске.